Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 40
Mayo de 2021

La crónica de la actividad de la SAPM de este mes de mayo está repleta de nombres de alumnos. No puede ser de otra manera. Durante este último mes, se han publicado lista de ganadores, premiados, finalistas..., de varias de las actividades que impulsamos desde la Sociedad.

Empezamos con el concurso que, aparentemente, está más *alejado* de las matemáticas: el III Concurso de Microrrelatos Matemáticos. La persona que se ha encargado de organizarlo, buscar y coordinar jurados, conseguir colaboraciones para los premios, etc., es Octavio Gómez quien es el más claro ejemplo de que esa mencionada lejanía es ficticia. Como se dice en el fallo del jurado:

> Esta actividad, unida al tradicional concurso de Radionovelas Matemáticas, ofrece una perspectiva más amplia de las matemáticas, de su didáctica y de su integración dentro de nuestra sociedad. Además, resulta muy interesante para dar un enfoque global del conocimiento rompiendo así compartimentos estancos.

La ganadora en la categoría de Primaria fue Beatriz Gaudioso Cester quedando como accésit Alba Adán Rubi y Jimena Sauras Val. Con lo que respecta a la categoría Secundaria/Formación Profesional Básica, la ganadora fue Lorena García Díaz siendo los accésit para Lucía Periz Piquer y Cecilia Jiménez. Jara Hernández Alamán ganó la categoría Bachillerato/Ciclos Formativos, en la que los accésits correspondieron a Marian Arana y Álvaro Sánchez. Finalmente, había una categoría General en la que se premió a Guillermo Nevot, mientras que M.ª Cristina Paño Crespo y Antonio M. Oller Marcén, obtuvieron accésit.

Y ya que lo hemos citado, vamos con los ganadores del VIII Concurso de Radionovelas Matemáticas.

En la categoría de Primaria ganó *Escuela de dioses,* cuyos autores son Javier Palomino Lallana, Yousef Chaouqi y Sara Laura Buta. Las obras finalistas fueron *La pelea de las aproximaciones* (de Alfredo Cruces Longares, Alejandro Drignei, Marta Colás Fondón y Raquel Ibáñez García) y *La atención nos suma, no nos resta* (Lucía Gracia Pasca, Elena Traín Garcés, Conchita Soria Ibáñez y Alejandro Tudor).

Erron, la caída de una estafa obtuvo el primer puesto en la categoría de Secundaria, siendo sus autores Alejandro Chávarri Moreno, Pablo Garicano Jaén y Carlos Pérez Higuera. Las radionovelas finalistas resultaron ser *La fortuna llama a tu puerta* (Eduard Paun, Lidia Rojo Nieto y Samuel Uriarte Lusilla) y *La conjetura de Hilbert* (Nerea Miranda, Rubén Navarro, Jorge Sorolla y Javier Vallano).

El concurso de Radionovelas lo impulsamos dentro del programa Conexión Matemática, en colaboración con el Gobierno de Aragón, al igual que el concurso de Tangram. Así que las personas que organizan estas actividades son

Sario Interactivo

Construyendo poliedros con Zentangle
La vida en el aula como motor de aprendizaje: experiencias matemáticas ricas
La probabilidad en la Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º ESO
Por el espacio exterior… e interior
A vueltas con la circunferencia (y el círculo)
Criptografía para principiantes:
Método de Playfair (Wheatstone)

únete
a la SAPM
click

Maite Aranés, Alejandro Beltrán, Pedro Latorre y Arancha López. El concurso de Tangram tradicionalmente es *online*, aunque hace dos cursos hicimos una fase final presencial. No hay que explicar por qué hemos vuelto a la versión total a distancia. La de este curso ha sido la sexta edición. Los nueve premiados (en orden) en la categoría Primaria y Secundaria fueron Jesús Villoslada Díaz (ganador), Marcos Pascual Romero, Adrián Romero Teresa, Aroa Pablo Palomera, Neira Pablo Palomera, Lucas Pascual Romero, Jesús Bayo Durán, Alejandro Sampablo Esteban y David Gallego Ballesteros. En la categoría Centros de Adultos ganó M.ª Carmen Laga Palau.

Y pasamos ya a nuestras actividades *estrella* con alumnos: las olimpiadas. Y pluralizo porque este curso, por fin, hemos conseguido poner en marcha la I Olimpiada Matemática Aragonesa Alevín. Después de la fase de centros y la semifinal a distancia, sí fue presencial la final. El coordinador de la organización, Alejandro Beltrán, la describe así:

> Durante la jornada, los 50 alumnos y alumnas clasificados en la semifinal online celebrada un mes antes, pudieron realizar de manera presencial la prueba final dividida en dos partes: una tipo test y otra de desarrollo. Fue una jornada de nervios, novedades, medidas de seguridad sanitaria y, sobre todo, de mucha ilusión. Todo el personal de la sociedad que colaboró en la olimpiada se volcó para que la jornada se desarrollara de la mejor manera posible y se notó el buen ambiente y las ganas de disfrutar de un día que llevábamos esperando más de un año.

Los premiados fueron Jorge Aguelo Blasco, Alfredo Cruces Longares, Luis del Olmo Enfedaque, Luis Fernández Muniesa y David Gracia Recaj. Entre ellos fueron seleccionados Jorge Aguelo Blasco, Luis Fernández Muniesa y David Gracia Recaj para representar a Aragón en la Olimpiada Nacional.

Mucho más asentada está la Olimpiada de 2.º de ESO, que este curso celebraba su 29 edición. Con alguna novedad, como son sus coordinadoras: Esther García y Maider Goñi. Hubo que incluir algunos cambios por la situación de la pandemia, pero hubo otros producto de la saludable renovación que una actividad tan longeva necesita. Esther y Maider relatan la final:

> El pasado sábado, 22 de mayo, tuvo lugar en el Aula Magna de la Facultad de Ciencias la fase Final de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.° ESO. En esta ocasión, 50 alumnos y alumnas (la mitad que en ediciones anteriores debido a las restricciones sanitarias actuales) resolvieron seis problemas durante dos sesiones de una hora cada una. Aún así, fue una jornada para celebrar que hay gran talento matemático en el territorio aragonés.
> Como novedad este año, la clausura de la Olimpiada fue retransmitida en directo a través de la cuenta de Instagram de la Sociedad (@sapmciruelos). En ella se entregaron premios a los cinco mejores clasificados: Malena Fernández Blanco, Solomia Glushak Zyemyerova, Arturo Martínez Gracia, Sergio Fernando Rubio Fernández y Jia Cheng Wang. Finamente, se proclamaron como representantes aragoneses en la XXXI Olimpiada Matemática Nacional: Malena Fernández Blanco, Sergio Fernando Rubio Fernández y Jia Cheng Wang.

Desde la Sociedad queremos agradecer la buena aceptación que han tenido todas estas iniciativas, y queremos hacer extensiva la felicitación a todos los participantes.

Premiados de la Olimpiada de 2.º de ESO

Premiados de la Olimpiada de 6.º de Primaria

DANIEL SIERRA RUIZ
Presidente de la SAPM

Construyendo poliedros con Zentangle

por
Felisa Gil Meléndez
(IES Vega del Turia, Teruel)

ZEN (meditación) TANGLE (garabato, enredo)

El Zentangle es un método de dibujo que utiliza de manera repetitiva tanto las formas geométricas rectas como las curvilíneas. El objetivo de esta actividad es fomentar la calma y la meditación a través del trazo de patrones estructurados que conforman bellas imágenes. Su técnica es fácil de aprender, además de relajante y divertida.

Sus creadores, María Thomas y Rick Roberts, afirman que casi cualquier persona puede conseguir sentirse orgulloso de sus dibujos. Su objetivo principal es aumentar la concentración y la creatividad, así como proporcionar una gran sensación de bienestar a través de la satisfacción artística.

¿Zentangle y matemáticas?

¿Cómo integrar esta técnica en las matemáticas? Todo comenzó cuando tuve la idea de hacer zentangle sobre los desarrollos de los poliedros regulares, para hacer más motivadora y atractiva la construcción de dichas figuras. Resultado de dicha idea fue la creación del taller *Construyendo poliedros con Zentangle*.

Este taller fue realizado por primera vez, con buena acogida por parte de los participantes, en la celebración del Día Escolar de las Matemáticas en la calle en Teruel, el año 2018 para el público en general. En su desarrollo contamos con la ayuda de mis compañeras del curso de Zentangle de la AECC de Teruel.

Zentangle en el IES Vega del Turia de Teruel

En el instituto, el taller se celebró el año 2019 el día de la jornada cultural para los alumnos de 3.º ESO. Estaban un poco desmotivados, ya que los alumnos vinieron obligados al taller y no de forma voluntaria. Se les había asignado dicho taller por la comisión que organizaba la jornada cultural. Se llevó a cabo en dos turnos con sesiones de una hora y media y con unos 20 alumnos en cada turno. Al terminar, su forma de ver el taller era más positiva que cuando comenzaron.

El objetivo de este taller era pasar un rato divertido y relajado dibujando motivos geométricos y de paso aprender algo de matemáticas.

El Zentangle lo usamos para decorar y hacer más llamativo el desarrollo de los poliedros regulares, para su posterior construcción.

Los alumnos estaban distribuidos en grupos de cuatro. En cada mesa del grupo dejamos el material necesario. Los materiales eran:

— Fotocopias con los distintos desarrollos.
— Rotuladores Pilot o similares en negro.
— Tijeras.
— Pegamento.
— Una cuerda fina para poder colgar nuestros cuerpos construidos.

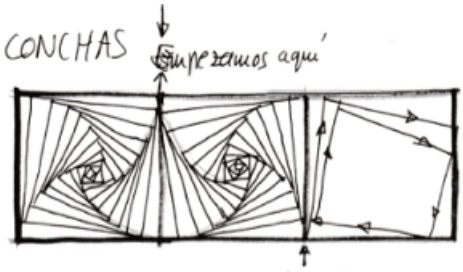
Al taller se llevaron los distintos poliedros construidos con los materiales del instituto y los diferentes modelos construidos por los profesores en papel.

Al principio se hizo una breve introducción sobre el Zentangle y repasamos los conceptos necesarios de los poliedros regulares (caras, vértices…) con una presentación multimedia; a continuación en la pizarra dibujamos los patrones paso a paso.

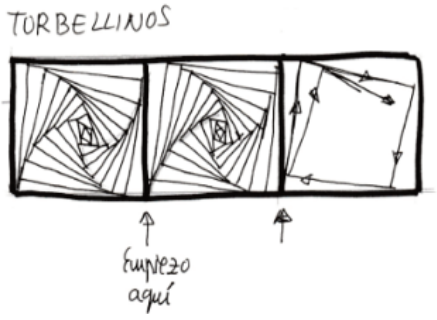
En este taller nos centramos en dos modelos o tramas con motivos geométricos: *Paradox* y *Fassett*.

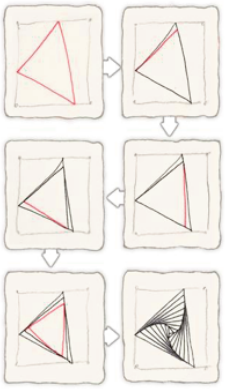
La trama *Paradox* (triángulos, cuadrados, pentágonos…) consiste en dibujar siempre el mismo polígono uno dentro de otro de manera que el resultado parece una espiral con polígonos cada vez más pequeños. Es muy importante dónde empezamos el segundo cuadrado ya que se pueden obtener *conchas* o *torbellinos*.

Paradox - conchas



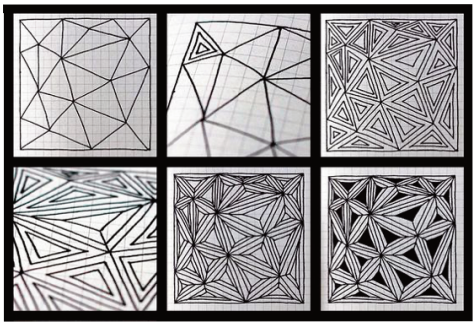
Paradox- torbellinos



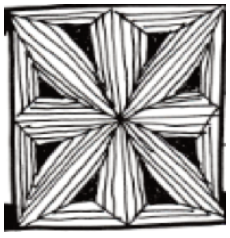


La trama *Fassett* (triangular estrellada) consiste en dibujar triángulos uno dentro del otro sin ningún punto en común, el más pequeño se pinta de negro y a continuación se unen los vértices de todos los triángulos y el resultado final es parecido a una estrella.

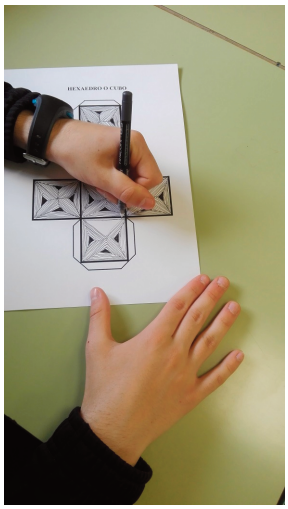
Fassett

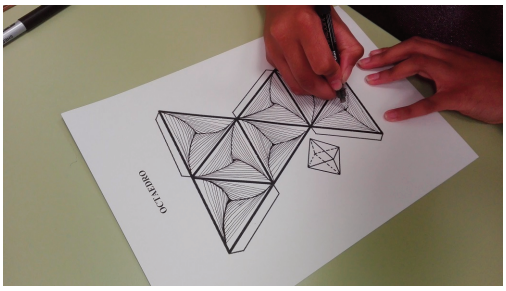


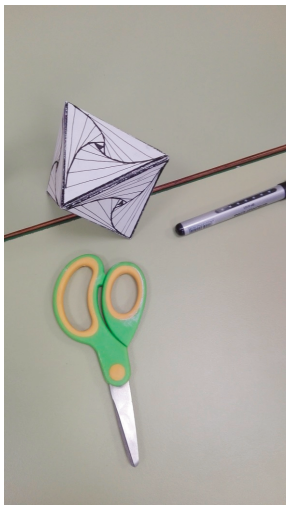
Resultado final

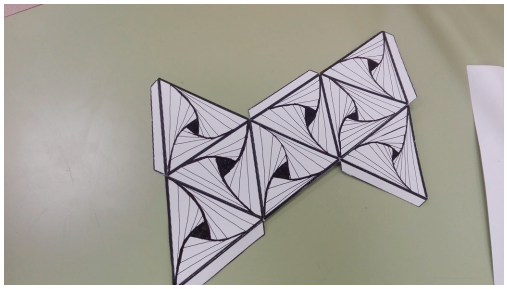


La mayoría de alumnos decoraron el desarrollo del cubo u octaedro

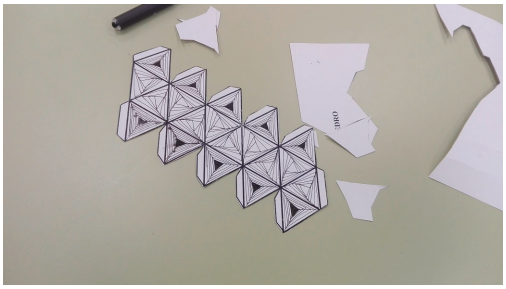


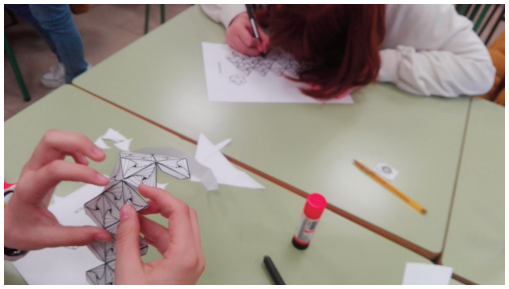


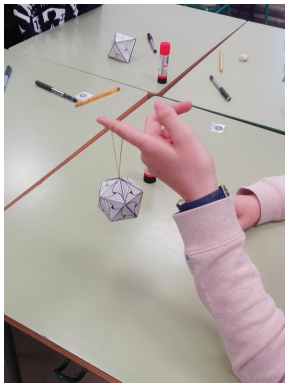


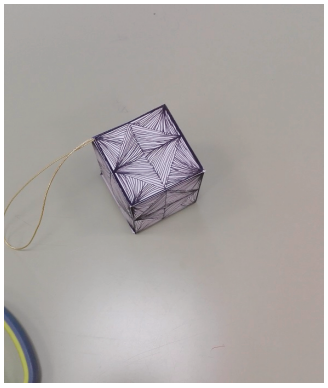


Algunos eligieron el icosaedro, un alumno mezcló los dos patrones en su desarrollo y otro incluso creó su propia trama.



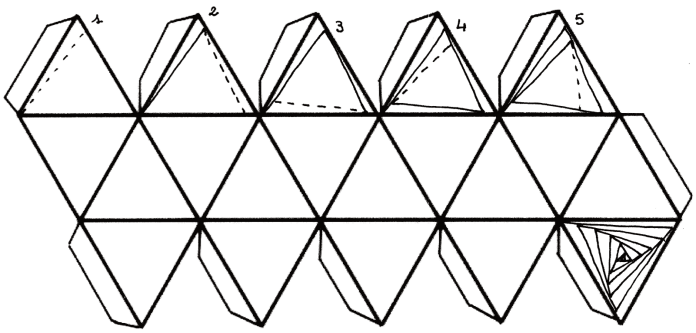


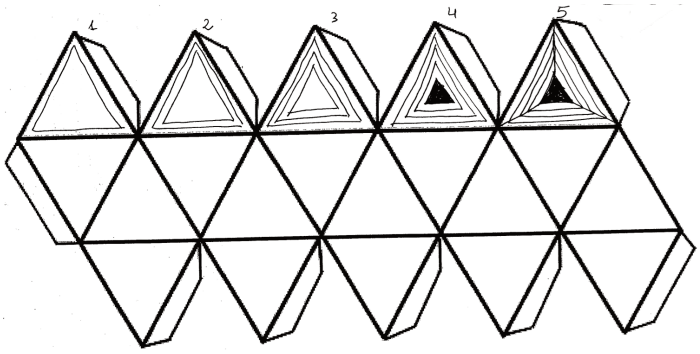




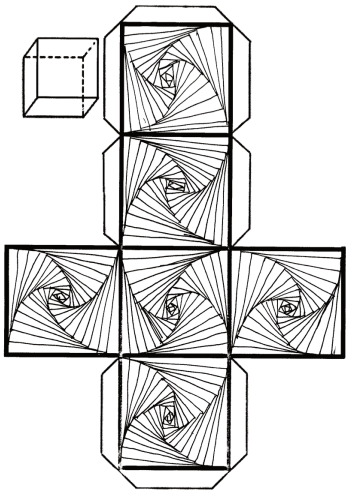
La actividad resultó muy interesante y motivadora, los alumnos se relajaron dibujando y al acabar estaban encantados con sus construcciones.

En la página siguiente se adjuntan algunos de estos desarrollos realizados por la profesora.

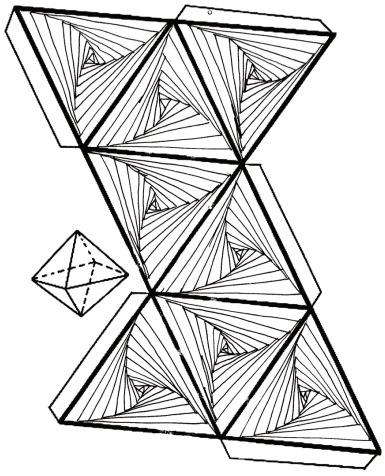




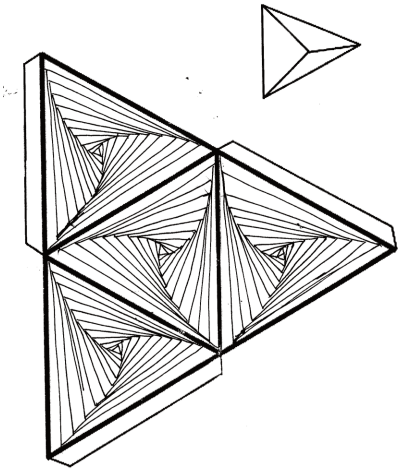
HEXAEDRO O CUBO

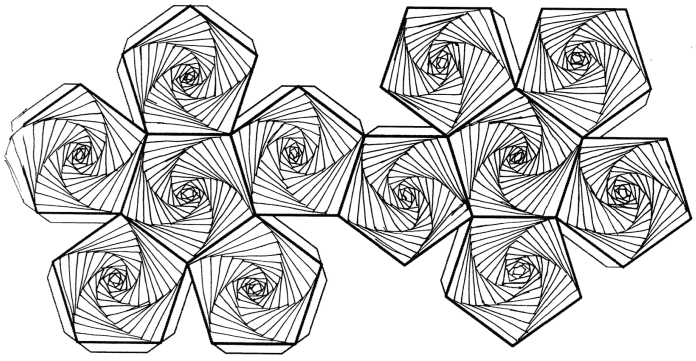


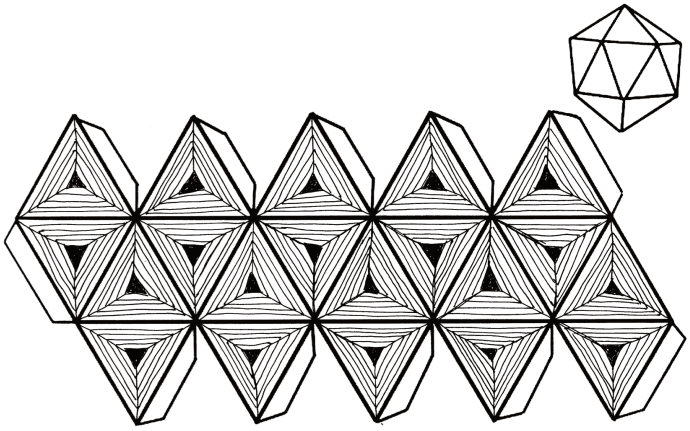
OCTAEDRO



TETRAEDRO







La vida en el aula como motor de aprendizaje: experiencias matemáticas ricas

por
Maria Àngels Portilla Rueda
(CEIP Son Anglada, Palma)

Los estudios en didáctica ponen de manifiesto la necesidad de trabajar desde la cercanía y los intereses de nuestros alumnos, tener la habilidad de, a partir de un detalle, una conversación… estirar del hilo y sacarle su provecho. Pero no siempre es fácil saber de qué hilo hay que tirar con la cantidad de situaciones que pasan cada día en el aula. Ahí es donde ponemos en juego nuestros conocimientos. Así, debemos escoger aquellas propuestas que resulten estimulantes para los alumnos y que, además, les permitan desarrollar aprendizajes matemáticos profundos. La idea de actividad/tarea rica nos puede servir de ayuda a la hora de decidir qué propuestas escogemos de entre todas ellas.

¿Qué significa *tarea rica*?

Para poder valorar la riqueza de las propuestas que queremos llevar a cabo, haremos una aproximación al término de *tarea rica* a través de una serie de criterios que propone Broomes (1989), como son:

— Deber estar relacionada con el contenido curricular.
— Permite establecer diferentes conexiones, tanto dentro de la propia área de las matemáticas como con otras áreas.
— Sirve como introducción y/o motivación para el trabajo de un contenido básico.
— Supone un reto para los alumnos, en tanto que parte de las posibilidades de todos ellos, así como también permite la expansión de aquellos más rápidos.
— Facilita la implicación del alumnado, ya que conecta con su día a día.
— Pretende buscar respuestas.
— Genera buenas preguntas.
— Ofrece al alumno ser consciente de sus aprendizajes.
— Promueve el debate y la comunicación. Es decir, incita a tomar decisiones, especular, formular hipótesis, justificar, explicar, reflexionar, interpretar…

Por tanto, resulta imprescindible tener en cuenta estos criterios, ya que serán los que nos lleven a generar actividades competenciales.

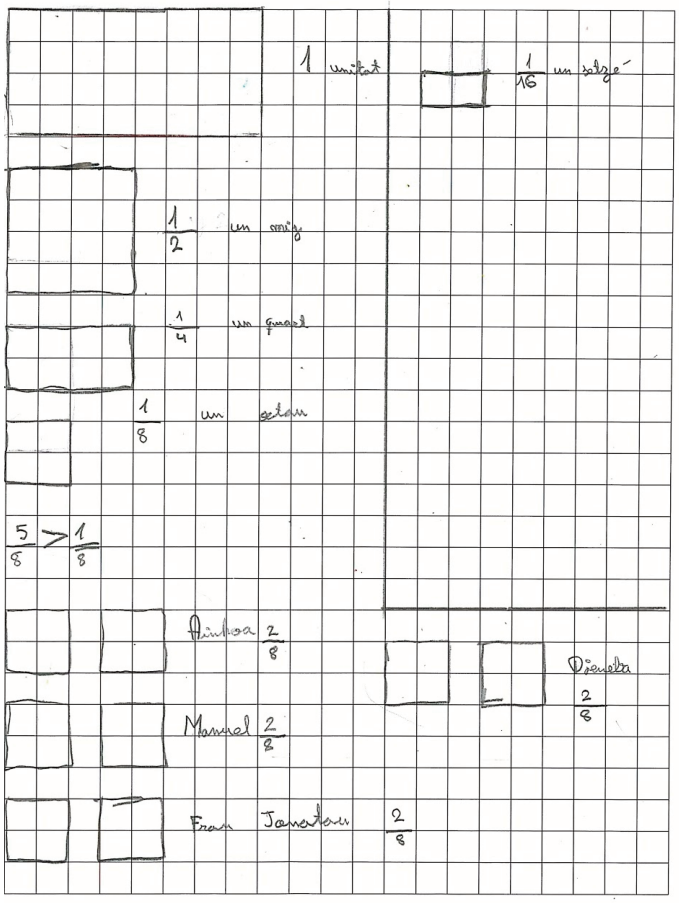
A continuación, veremos algunas experiencias que van en la línea de este concepto.

Cuatro experiencias

Todas las experiencias que se describen se han llevado a cabo en el colegio público CEIP Son Anglada, de Palma, en las Islas Baleares y están enmarcadas en la metodología de centro: talleres de cocina, talleres de matemáticas y proyectos.

Las fracciones saben a chocolate

El objetivo de esta propuesta es introducir el concepto de fracción en el curso de 3.º de la Educación Primaria. Si bien no es propiamente un concepto que se inicia partiendo de los intereses de los niños, sí pretende crear un contexto conocido y motivador para iniciarlo. Por ello se elige un alimento concreto, producto protagonista en ciertas ocasiones de nuestros talleres de cocina.



¿Por qué se escoge el chocolate? Este producto resulta ser conocido en la dieta de un niño, es asequible, se encuentra fácilmente disponible y su configuración rectangular ayuda a las diferentes representaciones. Este último punto debe ser cuidado, ya que dependiendo de la configuración rectangular escogida podremos trabajar con más o menos profundidad el contenido.

En una primera sesión pretendemos que el niño manipule, represente, escriba y lea fracciones básicas, que tengan un primer contacto con este concepto. Es por ello que, a medida que los niños partían la tableta de chocolate según la instrucción dada, iban apuntando en la libreta dicha fracción mediante: dibujo, escritura y numeración.

En una segunda sesión pretendemos que el niño compare fracciones con el mismo denominador y con diferente denominador, siempre con el apoyo visual de la tableta. Así, pueden extraer conclusiones como:

— Con el mismo denominador, comerás más chocolate cuanto mayor sea el número del numerador.
— Cuanto mayor sea el denominador, menor será la cantidad de chocolate que coma.

Finalmente, a la hora de evaluar, surgió la siguiente conversación:

M: ¿Qué prefieres comerte, un dieciseisavo o un cuarto?
A: Un dieciseisavo.
M: ¿Por qué?
A: A mí no me gusta mucho el chocolate, con un trocito pequeño me basta.

Por ello es necesario siempre que justifiquen la respuesta y no dar por supuesto el valor positivo o negativo de las respuestas de los niños.

¿Por qué *Las fracciones saben a chocolate* es una tarea rica? Por los siguientes motivos:

— Es una actividad introductoria para iniciar un contenido.
— El alumno es consciente de sus aprendizajes.
— Promueve la comunicación.

El patio de la escuela

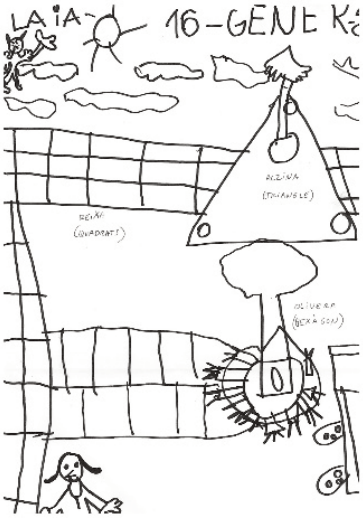
El objetivo de esta propuesta es profundizar en los conceptos previos que tienen los niños de 3.º de Educación Infantil respecto a la geometría, en concreto de las figuras planas. La propuesta surge a partir de las conversaciones que tienen los niños entre ellos en el patio. Observamos que es un tema muy presente y decidimos introducirlo también en los talleres de matemáticas.

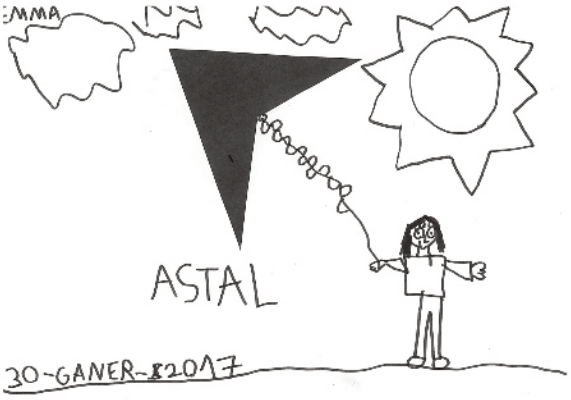
En una primera sesión se sale al patio con la intención de observar las figuras que podemos encontrar en él. Algunas resultan evidentes (triángulos), otras necesitan de reflexión (cuadrado apoyado en un vértice), otras que necesitan ayuda para contabilizar el número de lados, ya que no paraban en el punto de inicio y seguían contando lados (como es el caso del hexágono que rodea un olivo) y otras surgen en minoría (semicírculo). Finalizado este trabajo, entramos al aula, ponemos en común nuestras ideas, conclusiones, llegamos a acuerdos sobre determinadas figuras… Así, acabamos la sesión representando nuestro patio en un folio.

En una segunda sesión escogemos un material para representar diferentes figuras acordadas previamente. Finalmente nos inclinamos por los pinchitos de madera y la plastilina para crear triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos.

En la tercera sesión presentamos una serie de figuras planas en cartulina (triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos) con la intención de que ellos elijan cómo las quieren agrupar, clasificar. Se abre todo un debate sobre aquellas figuras que tienen «puntas hacia dentro» (cóncavas) y aquellas que son «raras» (no regulares). Finalmente deciden clasificar por número de lados, donde vuelven a salir los dos debates anteriores, pero entre ellos comprueban y demuestran por qué la figura está en ese grupo contando el número de lados.

Finalmente, les proponemos elegir una figura de entre todas las presentadas y que creen un objeto real, alguna cosa que les guste…





La riqueza de esta actividad está en que partimos de una realidad cercana de los niños para, poco a poco, llegar al lenguaje matemático, a la abstracción de ese conocimiento y, finalmente, volver a enlazar con nuestro día a día.

A nosotros, los maestros, nos queda reflexionar sobre dos aspectos: ¿por qué les extrañan las figuras cóncavas? Y ¿Por qué consideran que un pentágono o hexágono no regular no pertenece a dicho grupo?

¿por qué *El patio de la escuela* es una tarea rica? Por los siguientes motivos:

— Es una actividad motivadora para iniciar un contenido.
— Facilita la implicación del alumnado, ya que establece conexiones fuera del aula.
— Pretende buscar respuestas.
— El alumno es consciente de sus aprendizajes.
— Promueve el debate.

Cocinando con la resolución de problemas

El objetivo de esta propuesta es introducir el concepto de división en el curso de 3.º y 4.º de la Educación Primaria. Si bien no es propiamente un concepto que se inicia partiendo de los intereses de los niños, sí que también pretende crear un contexto conocido y motivador para iniciarlo. Es por ello que se elige un alimento concreto, los *panellets*, un dulce a base de almendras y piñones, típico en el día de Todos los Santos y, por tanto, un dulce estrella en nuestros talleres de cocina.

¿Por qué elegir resolución de problemas y cocina? Primero de todo, porque es una actividad propia del centro, los talleres de cocina y, de hecho, una de las que más éxito tiene. Además, la cocina puede aportar conocimientos más allá de la elaboración de una receta o de que quede en una actividad meramente lúdica. Finalmente, permite introducir nuevos conceptos que queramos trabajar.

En una primera sesión se prepara el producto y aprovechamos para trabajar aspectos de medida como el peso, la numeración, las equivalencias. Además, surge la necesidad de igualar el producto, ya que a la hora de hornearlo, si no fuera así, algunos se quemarían y otros quedarían crudos.

A continuación, surge la pregunta de los propios niños: «¿Cuántos panellets nos llevaremos a casa cada uno?» A través de las conversaciones y del debate los niños exponen sus argumentos.

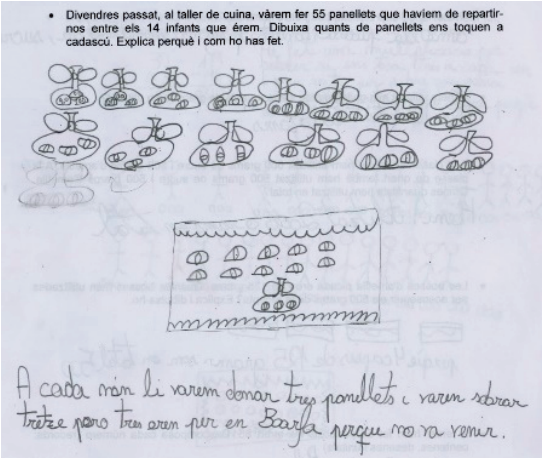
En la clase de 3.º son 18 alumnos y salen 64 panellets:

— Yo creo que 3, porque todos hemos hecho 3.
— Yo creo que 4; porque he hecho: 4, 8, 12… 60, 64. ¡No! No me bastan, ellos (señalando 2 compañeros) se quedan sin. Como me paso de 64 son 3, porque 3, 6, 9… 51, 54. Así me sobran 10.

En la clase de 4.º son 14 alumnos y salen 55 panellets:

— Yo sé que un panellet nos toca seguro, así que son 14. Dos también porque son 28. Tres también porque son… ¡42!
— Y me sobran porque no puedo repartirlos entre todos.
— Me falta 1 para seguir repartiendo.

Entre estos argumentos podemos observar como los niños sí tienen conocimientos previos sobre la división y que, aunque no sepan el algoritmo de la división tienen estrategias para hacer repartos. Es decir, tienen ideas intuitivas sobre el concepto de división que se acercan a la idea formal. Además, también podemos puntualizar el vocabulario que ya tienen respecto a este concepto: no me bastan, como me paso, me sobran, nos toca, me sobran, me falta…



Una vez hemos trabajado a nivel oral, plasmamos en papel los descubrimientos realizados. Se trata de representar la situación problema a través de dibujos, esquemas, gráficos… Este trabajo es esencial para poder saber qué entienden nuestros alumnos, cómo perciben esta realidad y cómo estructuran el pensamiento. Evidencias de esto son dibujos más o menos esquemáticos, la simplicidad a la hora de hacer cálculos, la riqueza de los escritos, la inclusión o no de algoritmos…

¿Por qué *Cocinando con la resolución de problemas* es una tarea rica? Por los siguientes motivos:

—Permite establecer conexiones entre diferentes áreas de aprendizaje.
— Es una actividad motivadora para iniciar un contenido.
— Supone un reto para los alumnos ya que todos pueden acceder y, además, permite la expansión de conocimientos para aquellos que lo necesiten.
— Facilita la implicación de los alumnos.
— Genera buenas preguntas.
— El alumno es consciente de sus aprendizajes.
— Promueve el debate.

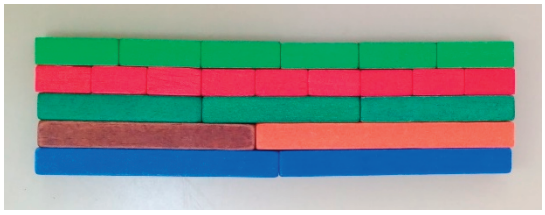
En clase somos 18

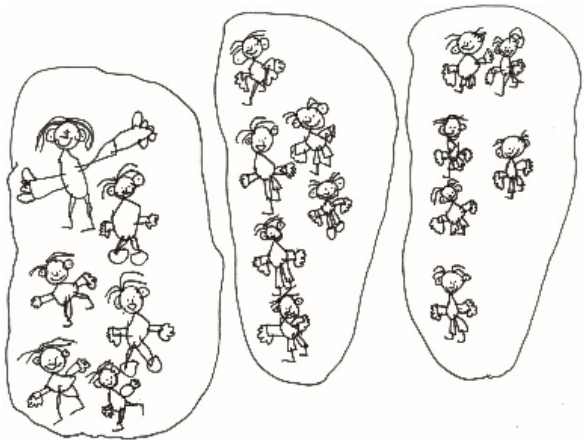
El objetivo de esta propuesta es conocer diferentes maneras de hacer grupos de alumnos en clase, concepto que con los alumnos de los últimos cursos de primaria llamaríamos *divisores*. La propuesta se lleva a cabo en el 3.º curso de la Educación Infantil y surge a partir de observar que cada mañana los alumnos de un grupo de 18 siempre se sientan en la alfombra en dos grupos: 9 niñas y 9 niños. Aprovechamos también para tratar algún aspecto relacionado con el género, ya que algunos alumnos son muy puristas y no permiten cambios en la organización de los grupos.

En una primera sesión pretendemos que los alumnos experimenten las diferentes maneras de agruparse con su propio cuerpo. Por ello, salimos al patio a jugar al juego de *Paquetes*, que consiste en decir de cuántos miembros debe ser un paquete (¡Paquetes de… 2!) y que se vayan agrupando. Para ello, partimos de los números que ellos van proponiendo. Así observan que hay paquetes que sí se pueden realizar (2, 3, 6 y 9), y otros propuestos que no son posibles (4, 5).

En la siguiente sesión representamos estos grupos con las regletas, material con el que ya están familiarizados los niños. Una vez visto la cantidad de regletas que se necesitan para cada cantidad, lo que vienen siendo los números de grupos, también se dibujan estos grupos en la pizarra, relacionando cada uno de ellos con una regleta.

Finalmente, cada niño escoge qué grupo les gustaría representar y en un folio lo lleva a cabo.





Esta propuesta nos permite romper con ese círculo de 9 niños y 9 niñas y, a partir de ahí, que sean ellos los que decidan y consensúen cómo quieren agruparse cada día.

Resultaría interesante plantearse con cursos superiores qué pasaría si un día falta un niño al aula y, por tanto, fuesen 17. Entonces aparecería el trabajo de pares/impares y el de números primos.

¿Por qué *En clase somos 18* es una tarea rica? Por los siguientes motivos:

— Es una actividad motivadora para iniciar un contenido.
— Supone un reto para los alumnos ya que todos pueden acceder y, además, permite la expansión de conocimientos para aquellos que lo necesiten.

— Pretende la búsqueda de respuestas.
— El alumno es consciente de sus aprendizajes.
— Promueve la comunicación.

Otras propuestas

Podemos encontrar otras propuestas encaminadas en la misma dirección en la revista *Suma*, publicación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), concretamente en la sección *Diario de experiencias matemáticas*, redactado por Aina González, Magdalena Martí, Susanna Morell, Pepa Pizà y Maria Àngels Portilla, maestras de educación primaria en activo y miembros de la SBM-XEIX, Societat Balear de Matemàtiques.

Hasta el momento las propuestas publicadas son:

— *Preguntas que generan otras preguntas* (*Suma* 93).
— *Infografías, un mundo por descubrir* (*Suma* 94).
— *¡Cuántas matemáticas tiradas por el retrete!* (*Suma* 95).
— *¿Y tú qué quieres ser demayor?* (Suma *96)*.

¿Qué dice el currículum de Aragón?

En la introducción del currículum de Educación Primaria del Gobierno de Aragón del área de Matemáticas, encontramos el siguiente párrafo:

> El trabajo en esta área está basado en la experiencia (…). Las matemáticas se aprenden utilizándolas en contextos (…) de la vida diaria (…). A partir de cuarto el alumno va desarrollando su capacidad para analizar, asimilar y enfrentarse a situaciones de entornos no tan ligados a su día a día desplazando el centro (…) al mundo físico y social que vive, explora, investiga, descubre, lee, describe…

Además, si analizamos los criterios de evaluación de cada curso y cada bloque siempre encontraremos dos que se repiten en todos ellos:

> Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando su utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.
> Resolver problemas relacionados con situaciones del entorno escolar y familiar (…) explicando oralmente el proceso aplicado.

Por tanto, el formato de experiencias también se enmarca en el currículum de Aragón. Es más, podemos aventurarnos a decir que es el formato ideal para trabajar cualquier contenido, ya que, como hemos visto, en todos los bloques y cursos encontramos este tipo de propuestas.

¿Cómo programar tareas ricas?

A la hora de programar tareas ricas debemos tener presente que queremos cultivar las competencias en nuestros alumnos. Pero, ¿cómo podemos conseguirlo?

Pues bien, desde el CESIRE (Centre de Suport a la Innovació i a la Recerca Educativa), un centro de trabajo de la Generalitat de Catalunya, nos proponen una serie de preguntas que nos pueden servir de indicadores del nivel de riqueza competencial que posee una actividad. Para ello debemos fijarnos en dos aspectos de la propuesta, que son:

— Planteamiento de la actividad; es interesante preguntarse:
- ¿Es una actividad que tiene por objetivo responder una pregunta? La pregunta puede referirse a un contexto cotidiano, puede enmarcarse un juego, puede tratar una regularidad o un hecho matemático.
- ¿Lleva a aplicar conocimientos ya adquiridos y a hacer nuevos aprendizajes?
- ¿Ayuda a relacionar conocimientos diversos dentro de la matemática o con otras materias?
- ¿Es una actividad que se puede desarrollar de diferentes formas y estimula la curiosidad y la creatividad del alumnado?

- ¿Implica el uso de instrumentos diversos como material que se pueda manipular, herramientas de dibujo, software, calculadora, etc.?

— Gestión del aula; es interesante preguntarse:

- ¿Se fomenta la autonomía y la iniciativa del alumnado?
- ¿Se interviene a partir de preguntas adecuadas más que con explicaciones?
- ¿Se pone en juego el trabajo y el esfuerzo individual pero también el trabajo en parejas o en grupos que llevan a hablar, argumentar, convencer, consensuar, etc.?
- ¿Implica razonar sobre lo que se ha hecho y justificar resultados?
- ¿Se avanza en la representación de manera cada vez más precisa y se usa progresivamente un lenguaje matemático más preciso?

Conclusiones

Finalmente, después de analizar estas cuatro experiencias, se ponen en evidencia algunos aspectos clave a la hora de querer trabajar a partir de la vida de aula, que son:

— Hay que partir del entorno del niño, de su realidad más cercana, pero sin olvidar que debemos ir madurando esos conocimientos y llegar al lenguaje propio de las matemáticas.
— La motivación es clave para poder aprovechar al máximo las capacidades de los niños.
— Debemos tener presente que hay que ofrecer sesiones de manipulación, materiales, que permitan hacer de puente entre la realidad y la abstracción.
— Hay que llegar a la representación, adecuándola al nivel con el que trabajamos, es una fase más del aprendizaje. Sin ella, el proceso no es totalmente completo.
— Debemos acompañar y guiar a nuestros alumnos, no ser meros observadores. Debemos hacerles preguntas, facilitarles ayuda si la requieren, plantearles otras posibilidades…

Referencias bibliográficas

ALSINA, À. (2010), «La pirámide de la educación matemática», *Aula de Innovación Educativa* 189, 12-18, recuperado de <https://dugi-doc.udg.edu/bitstream/handle/10256/9481/PiramideEducacion.pdf?sequence=>.

BROOMES, D. (1989), *Using goals to construct useful forms of school mathematics*, UNESCO, Col. Science and Technology Education, París.

GOST, I., M. À. RUEDA y D. RUIZ (2015): «Las fracciones saben a chocolate», en Sánchez, P. Á. (ed.) *17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Murcia, recuperado de <https://17jaem.semrm.com/actas/actas_17JAEM_2015.pdf>.
La presentación correspondiente a la ponencia puede consultarse en <https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vTlwA3bFycF6H34PqUsxkv2A92dyxKkw5Bj80sGCPJ9zU7DDlTjAl3RU5cSRqd4YCuWZThLtPjABhkv/pub?start=false&loop=false&delayms=3000&slide=id.p>.

RUEDA, M. À. (2016), «Cuinant amb la resolució de problemas», Congrés Català d'Educació Matemàtica, Barcelona, recuperado de <https://c2em.feemcat.org/wp-content/uploads/actes/2C131.pdf>.
La presentación correspondiente a la ponencia puede consultarse en <https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vRNNK1igfYphKNcpLGtIqJlZJowMvIUkauom_fsG-T8fafaUW1Y8AZiMGQXzyiJcXDqktzYjuEV2ZCU/pub?start=false&loop=false&delayms=3000&slide=id.p>.

PORTILLA, M. À. (2019), «El pati de l'escola», en 19 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, A Coruña.
La presentación correspondiente a la ponencia puede consultarse en <https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vQsaGtWDxoXXSQ1Wdlp7t5NL6MtlEVSKRGGDAtYWMsOwDeqmSoVkagjvgNSO1dWI9fd-qkfjjids3_5/pub?start=false&loop=false&delayms=3000&slide=id.p>.

GONZÁLEZ, A., M. MARTÍ, S. MORELL, C. PIZÀ, y M. À. PORTILLA (2020-21), «Diario de experiencias matemáticas», sección de la revista *Suma*, FESPM, <http://www.xeix.org/activitats-sbm-xeix/seccio-revista-suma-diario-de-experiencias-matematicas/>.

GENERALITAT DE CATALUNYA, DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ, CENTRE DE SUPORT A LA INNOVACIÓ I RECERCA EDUCATIVA (CESIRE) (2014): «Preguntes que poden servir d'indicadors del nivel de riqueza competencia d'una activitat», Barcelona, recuperado de <https://agora.xtec.cat/cesire/wp-content/uploads/usu397/2019/01/indicadors_competencials.pdf>.

La probabilidad en la Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º ESO

por
J. M. Rubio-Chueca, J. M. Muñoz-Escolano y P. Beltrán-Pellicer
(Universidad de Zaragoza)

Entre todas las actividades organizadas por las distintas sociedades que forman la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), la Olimpiada Matemática de 2.º de Educación Secundaria es una de las más destacadas y emblemáticas. En Aragón, con casi 30 años de historia, la fase autonómica de la Olimpiada Matemática de 2.º de Educación Secundaria, organizada por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas (SAPM), puede ser considerada un éxito desde distintos puntos de vista. Por un lado, por la abundante participación del alumnado, con más de 1 200 estudiantes aragoneses en la edición de 2019, lo que hace necesario la organización de una fase semifinal y una fase final autonómica. Por otro lado, por la implicación del profesorado de matemáticas y los centros educativos, con más de 14 sedes en todo Aragón y la colaboración de muchos profesores de matemáticas en Aragón en la organización, la elaboración de problemas, la corrección, la vigilancia o acompañando a los estudiantes de su centro. Otro factor destacable es que este concurso contribuye a la popularización de las matemáticas entre la comunidad escolar y, en concreto, sirve para situar la resolución de problemas como eje vertebrador del aprendizaje de las matemáticas. Finalmente, la Olimpiada es una actividad que sirve para visibilizar a la SAPM como un agente activo en los procesos de educación matemática en Aragón.

Desde la investigación en educación matemática, Toh (2013) señala que las olimpiadas matemáticas, más allá de ser concursos matemáticos puntuales, pueden servir como banco de recursos útiles para que los profesores elaboren tareas *ricas* con finalidades instruccionales para alcanzar dos objetivos: el desarrollo del interés de los estudiantes por las matemáticas y el desarrollo de habilidades de pensamiento de orden superior en la materia. Además, Jaime y Gutiérrez (2017) señalan la resolución de problemas como una acción de apoyo para atender a la diversidad en caso de estudiantes de alta capacidad donde sitúan a las competiciones matemáticas (Ortega, Berciano, y Pecharromán, 2018) y, en concreto, a las olimpiadas matemáticas.

Numerosos estudios e investigaciones consideran de suma importancia el estudio de la probabilidad. Cualquier persona, en su día a día, debe tener conocimientos de probabilidad para tomar decisiones, emitir juicios sobre relaciones entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones (Gigerenzer, 2002). En este sentido, la conexión de la probabilidad con la vida cotidiana es mucho más directa que el resto de los bloques de contenido de las matemáticas escolares. Inspirados por la noción de alfabetización matemática (*mathematical literacy*), que surge en el contexto de los estudios PISA de la OCDE, diversos autores como Jones (2005) o Batanero (2007, 2014), señalan la necesidad de que toda la ciudadanía alcance un alto grado de alfabetización probabilística. Siguiendo el modelo propuesto por Gal (2005), se trata de ofrecer herramientas a los alumnos que les facilite tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

Producto de todo lo anterior surge este estudio, cuya finalidad es investigar los problemas matemáticos presentes en la Olimpiada Matemática Aragonesa con el propósito de observar la representatividad de los contenidos de probabilidad en estas competiciones, y abrir la puerta a realizar acciones para reconocer y promover el aprendizaje de la probabilidad en la Educación Secundaria. Para llevarlo a cabo se va a analizar los problemas que abordan contenidos de probabilidad desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

Marco teórico

El EOS (Godino, 2002) concede herramientas para el análisis de la enseñanza, de los recursos involucrados en ella y del aprendizaje llevado a cabo por los alumnos. Este enfoque centra su interés en las prácticas matemáticas cobrando gran relevancia la noción de situación problema (tarea, problema, etc.) y los objetos matemáticos intervinientes en tales prácticas. Desde esta perspectiva, Godino, Batanero y Font (2007), proponen tipos de objetos matemáticos que se clasifican en: situación–problema, lenguaje, conceptos–definición, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Metodología

En el estudio para la demanda cognitiva y análisis de los objetos matemáticos ligados a la probabilidad se utiliza como método el análisis de contenido (Krippendorff, 2013) realizando un estudio de tipo exploratorio-descriptivo.

Muestra y unidades de análisis

La muestra y UA se corresponden con los problemas de probabilidad llevados a cabo en las pruebas individuales de la semifinal y final en la Olimpiada Matemática Aragonesa desde 1989 (I Olimpiada Aragonesa) al 2019 (XXVIII Olimpiada Aragonesa) en los que se abordan contenidos de probabilidad.

Categorías de análisis

En cuanto a las categorías de análisis del lenguaje, en primer lugar, distinguimos las expresiones verbales, considerando el trabajo de Shuard y Rothery (1984). Además del verbal, se han analizado otros registros adaptando los trabajos de Gómez y otros, (2013) y Ortiz, Albanese y Serrano (2017): el lenguaje numérico, el lenguaje simbólico–conjuntista, el lenguaje tabular y el lenguaje gráfico–diagramático.

Por otro lado, se han categorizado las tareas de acuerdo con los procedimientos que movilizan. Siguiendo el trabajo de Gómez, Batanero y Contreras (2014) se han tenido en cuenta los procedimientos relacionados con los significados de la probabilidad: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático.

Análisis de los resultados

Una vez seleccionadas las unidades de análisis se codificaron de acuerdo con los indicadores descritos. Para ello se dicotomizaron asignando puntuaciones a cada indicador según su presencia (1) o ausencia (0) en cada uno de los problemas sobre probabilidad.

Representatividad de los problemas vinculados a la probabilidad

En la fase semifinal de la olimpiada autonómica de 162 problemas, solo 2 problemas (1,27 %) corresponden a tareas relacionadas con la probabilidad, mientras que, en la final de la olimpiada autonómica de 165 problemas, se identifican un total de 4 problemas (2,4 %). De la tabla 1 se desprende que, en total, de 327 problemas analizados en la olimpiada a lo largo de estos años, 6 (1,8 %) tienen que ver con la probabilidad.

Lenguaje y procedimientos en los problemas de probabilidad propuestos

Es destacable que, en el apartado de lenguajes, predominan las expresiones verbales específicas de juegos de azar (64,6 %), seguido de las cotidianas (23,1 %) y específicas de probabilidad (12,3 %). Resaltar que no encontramos, pese a la importancia que tiene, el registro tabular y, encontramos en muy pocas ocasiones, el uso del lenguaje gráfico-diagramático destacando los diagramas de árbol. En cuanto a los procedimientos, el 96,6 % corresponden

Olimpiada	*N.º de problemas*	*N.º de problemas de probabilidad*
Autonómica (semifinal)	162	2
Autonómica (final)	165	4

Tabla 1. Distribución por Olimpiada de los problemas de probabilidad (elaboración propia)

a procedimientos relacionados con el significado clásico. En todos los problemas analizados, aparece en algún momento como procedimiento el cálculo de la regla de Laplace.

Conclusiones

Está clara la poca representatividad que ocupan los contenidos de probabilidad en las Olimpiadas Matemáticas. Aunque desde 2013 se vienen celebrando Olimpiadas de Estadística (conocidas desde 2017 como Competición Estadística Europea), pensamos que la Olimpíada Matemática Aragonesa debería tener una mayor representación de la probabilidad. Esto es algo que podría estar relacionado con los sistemas de creencias del profesorado que imparte matemáticas en las diferentes etapas educativas (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004), lo cual abre una posible línea de investigación.

En cuanto al lenguaje, y a pesar de la poca población de estudio, sorprende que en ningún momento aparezca el registro tabular en los enunciados de los problemas. Si bien es cierto, aparece de forma implícita en los procedimientos llevados a cabo en la resolución de problemas para facilitar la enumeración de casos favorables. Además, se constata en los enunciados el predominio de lenguajes específicos de juegos de azar y probabilidad cuya resolución pone en juego procedimientos relacionados con enumerar casos favorables y cálculo de la regla de Laplace, dejando de lado el significado frecuencial.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 y el grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2007), «Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo», *Investigación en el aula de matemáticas : estadística y azar*, Thales, Granada, 1-16.

— (2014). «Probability teaching and learning», en S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer, Dordrecht.

Batanero, C., M. Henry y B. Parzysz (2005), «The nature of chance and probability», en G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* Springer, New York, 15-37.

Estrada, A., C. Batanero y J. M. Fortuny (2004), «Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio», *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (2), 263-274.

Gal, I. (2005), «Towards *probability literacy* for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas», en G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Springer, New York, 39-63.

Gigerencer, G. (2002), *Calculated risks: How to know when numbers deceive you*, Simon & Schuster, New York.

Godino, J. D. (2002), «Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática», *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D., C. Batanero y V. Font (2007), «The onto-semiotic approach to research in mathematics education», *ZDM,* 39 (1-2), 127-135.

Gómez, E., C. Batanero y J. M. Contreras (2014), «Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España», *Épsilon*, 31 (2), 25-42.

Gómez, E., J. J. Ortiz, C. Batanero y J. M. Contreras (2013), «El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria», *Unión*, 35, 75-91.

Jaime, A., y Á. Gutiérrez (2017), «Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática», en J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI*, SEIEM, Zaragoza, 71-89.

Jones, G. A. (Ed.) (2005), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Springer, New York.

Krippendorff, K. (2013), *Metodología de análisis de contenido, Teoría y práctica,* Paidos, Barcelona.

Ortega, T., A. Berciano y C. Pecharromán (2018), *Complementos de formación matemática*, Síntesis, Madrid.

Ortiz, J. J., V. Albanese y L. Serrano (2017), «Análisis semiótico del lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de educación secundaria obligatoria», en J. M. Contreras y otros (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Shuard, H., y A. Rothery, A. (Eds.) (1984), *Children reading mathematics*, Murray, London.

Toh, T. L. (2013), «Mathematics Competition Questions and Mathematical Tasks for Instructional Use», en B. Kaur (Eds.), *Nurturing Reflective Learners in Mathematics: Yearbook 2013*, World Scientific, AME, Singapore, 189-207.

Por el espacio exterior… e interior

por
Ana Isabel Blasco Nuño, Carmen Soguero Pamplona y Ricardo Alonso Liarte
(CEIP Ricardo Mallén, Calamocha; Universidad de Zaragoza, Teruel;
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Parece obvio que el conocimiento de la posición es previo a la realización de medidas. Los niños, desde bien pequeños, son capaces de reconocer su propia posición respecto a ciertas referencias, así como realizar movimientos planificados dentro del espacio que les rodea.

Tanto la Ley Orgánica de Educación como la Orden en la que se desarrolla el currículo de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Aragón, recogen la necesidad de tratar la exploración del espacio y, por tanto, la geometría en la etapa de Infantil. Ambos hacen referencia al desarrollo de contenidos como:

> Situación de sí mismo y de los objetos en el espacio. Posiciones relativas. Identificación de formas planas y tridimensionales en elementos del entorno. Exploración de algunos cuerpos geométricos elementales. Nociones topológicas básicas (abierto, cerrado, dentro, fuera, cerca, lejos, interior, exterior...) y realización de desplazamientos orientados.

Así mismo, los *Principios y Estándares del National Council of Teaching of Mathematics* NTCM (2003) también reflejan la necesidad de trabajar con formas y posiciones en esta etapa. De hecho, para el periodo de los 3 a los 8 años, Alsina (2015) analiza este documento, señalando un doble enfoque en los contenidos espaciales: los relativos a la posición y los relativos a la forma. Respecto a los segundos es necesario centrarse en el análisis de las propiedades geométricas. Sin embargo, en lo que se refiere a la posición, el NTCM hace especial hincapié en lo que se consideran los tres aspectos fundamentales de la organización espacial: la posición relativa, la dirección y la distancia.

Mediante el desarrollo de sus experimentos, Piaget muestra que la organización y adquisición de los conceptos geométricos se inicia con ideas propias de la topología, más tarde se arman relaciones proyectivas entre los conceptos y por último, aparecen las relaciones métricas. Según Clements y Battista (1992) este orden estaría condicionado por el hecho de que las propiedades topológicas hacen referencia a figuras aisladas, por lo que son más fáciles de percibir que las proyectivas o las métricas que implican el establecimiento de una referencia.

En esta secuencia de desarrollo, al trabajar las nociones topológicas aparecen invariantes como «abierto–cerrado», «dentro–fuera», «interior–exterior», «continuo–discontinuo», «conexo–inconexo», etc. Cuando se llega a las nociones proyectivas aparecen otros como «arriba–abajo», «sobre–bajo», «delante–detrás», «izquierda–derecha», «cerca–lejos», «encima de–debajo de», etc. Y al llegar a las nociones métricas se tratan las formas geométricas o los cuerpos en el espacio.

En la selección de actividades de GeoGebra que mostramos en este artículo se trabaja con los invariantes topológicos y proyectivos, dejando los métricos para el siguiente.

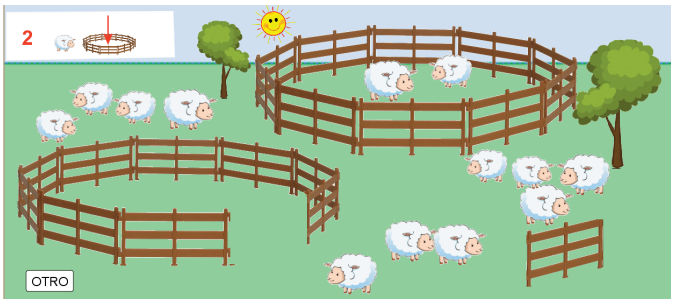
Antes de comenzar su descripción queremos señalar que consideramos que la necesidad de realizar actividades físicas con el propio cuerpo y manipulativas para interpretar la posición relativa de los objetos respecto a uno mismo es insoslayable. Constituyen el primer paso, antes incluso de llegar al sistema educativo, que les permite explorar y cimentar los conocimientos geométricos posteriores. Sin embargo, como en tantos otros temas matemáticos, el uso colectivo o individual de la pizarra interactiva puede ayudar a asentar estos conocimientos mediante la práctica reiterada, la discusión entre iguales y la representación de la información. Lógicamente, pasamos a trabajar en el plano, como paso previo a la representación del espacio.

Todas las actividades que se detallan a continuación se encuentran en el libro de Geogebra *Posiciones* en el siguiente enlace:<https://www.geogebra.org/m/keJ5rkhv>.

Actividades para trabajar los invariantes topológicos

Encierra a las ovejas

Esta actividad presenta un escenario con un prado en el que pastan trece ovejas. Hay dos cercados: uno abierto y otro cerrado. Arriba a la izquierda se presentan las instrucciones de la actividad empleando los dibujos de la propia actividad: aparece un número, que es el cardinal del conjunto de ovejas que se deben introducir o dejar fuera del redil que aparece a continuación. Además, disponemos de la puerta que puede cerrar la cerca abierta. Esta acción es manual y se deja a la elección del docente.

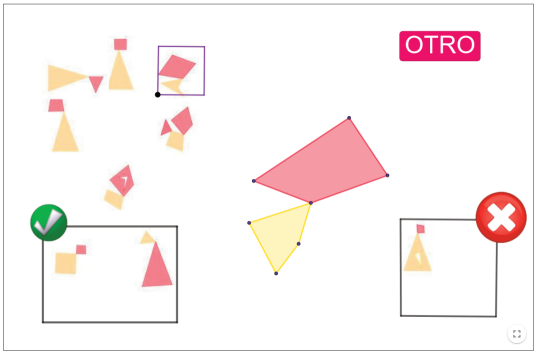


Como en todas las actividades de este libro, no hay una confirmación por parte del *applet* sobre la corrección o incorrección de la actividad del alumno. Esto es así para potenciar la figura del docente, que es el que guía la actividad y la valida.

Con este *applet* se pueden desarrollar situaciones de cardinalidad con recuento, tanto de tipo cálculo como de tipo construcción y se trabajan invariantes topológicos como los conceptos de abierto–cerrado o dentro–fuera. También se pueden realizar sumas y restas a partir de recuentos e incluso introducir el concepto de decena.

Deformando figuras

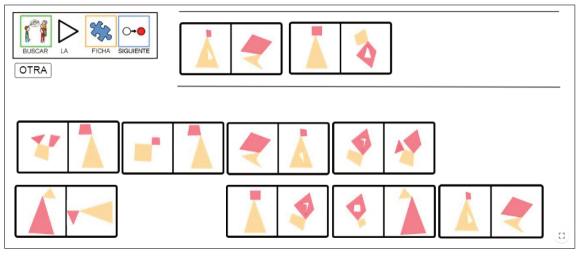
La actividad ofrece una colección de figuras fijas formadas por dos tipos de polígonos. Junto a ellas hay otra figura, más grande, cuya forma se puede cambiar estirando de los puntos que ofrece en sus vértices. Se trata de una actividad que propone una clasificación de las figuras disponibles en dos grupos: las que son topológicamente equivalentes a la figura deformable y las que no. Para ello, seleccionamos una de las figuras fijas enmarcándola mediante un cuadrado móvil para centrar la atención del alumnado en ella. La actividad consiste en que intenten reproducir la forma de la figura fija en la deformable, mediante cambios de forma en esta última. Si lo consiguen, la figura fija se llevará al «almacén» de la marca verde, y si no se puede hacer, la llevarán al de la roja. Una vez clasificadas todas las figuras, se pueden buscar verbalmente semejanzas y diferencias entre las figuras que están en la misma caja. Y si se quiere volver a realizar la actividad basta hacer clic en el botón OTRO.



Dominó de figuras

Esta actividad se complementa con la anterior, ya que trabaja con figuras iguales o parecidas a las que aparecían antes. Se muestra una colección de tarjetas dobles, al estilo de las piezas de un dominó, en cada una de las cuales se pueden observar dos figuras como las de la actividad anterior. En la parte superior hay otra ficha, fija, que cambia aleatoriamente al apretar el botón OTRO. Con este material proponemos dos tipos de actividades. Una «de entrenamiento» en la que los niños, saliendo por turnos a la PDI y contando con la ayuda verbal de los demás, tendrían que elegir una ficha de las de abajo cuya figura de la izquierda fuera topológicamente equivalente a la figura de la

derecha de la ficha fija de arriba. Esta actividad se realizaría con posterioridad a *Deformando figuras*, apelando a la evocación de la deformación que han trabajado previamente en dicha actividad. Más adelante, se podría organizar la clase en dos equipos y hacer una partida encajando las piezas del dominó completo con el mismo criterio.



Actividades para trabajar los invariantes proyectivos

Vistas de animales

Este *applet* nos propone trabajar con imágenes de animales desde diferentes puntos de vista: de frente, de espaldas y desde abajo. Por ello nos lleva a las contraposiciones absolutas delante, detrás y abajo.

En el centro de una tabla se presenta un animal coloreado. La actividad consiste en seleccionar el dibujo correspondiente a las otras vistas del animal y situarlas a ambos lados del mismo.

Si la elección es correcta, aparece una cara sonriente de confirmación. Es la única actividad del libro que cuenta con esta respuesta, ya que todos los demás están pensados para que el docente los incorpore a sus clases, teniendo un papel de guía en la realización de las aplicaciones.

Además, aparecen los nombres de los animales en letras mayúsculas, pudiendo elegirse el idioma entre castellano, francés e inglés.

Globos y juguetes

Se trata de una actividad muy abierta que proporciona al docente un material para trabajar la orientación en el plano y la localización de objetos según su posición, empleando términos relativos contrapuestos, como «encima de–debajo de», «a la derecha de–a la izquierda de», «más cerca de–más lejos de», o términos relativos sin contrapuestos, como «al lado de», «entre» o «en medio de».

La escena presenta una estantería con algunos juguetes colocados, y una colección de globos de colores que los niños deberán ir poniendo en otros estantes. Su situación será indicada por el docente en una posición relativa a los juguetes que ya están colocados. En sus consignas irá trabajando el vocabulario de los términos, contrapuestos o no. Los juguetes cambian aleatoriamente de posición pulsando el botón OTRO.

La aplicación interactiva también tiene disponible la herramienta LÁPIZ por si se quiere marcar o rodear alguno de los objetos. Incorpora la descripción de la actividad con pictogramas.

Como comentábamos al principio se trata de una actividad muy abierta, pensada para trabajar en gran grupo fomentando el intercambio de ideas y la comunicación verbal.

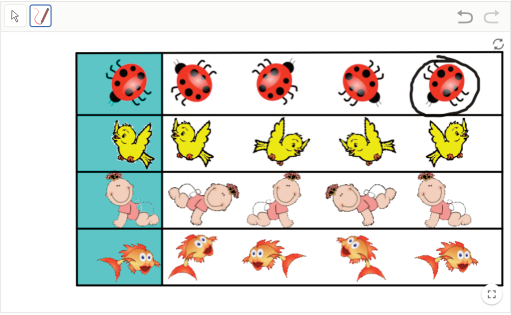
Direccionalidad 1 a 7

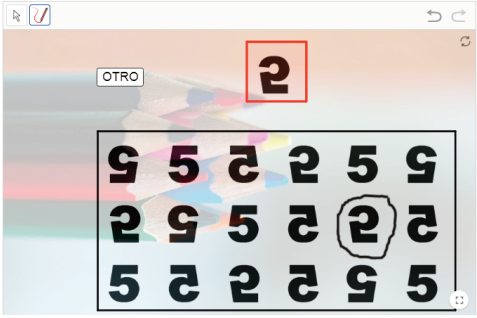
Incluimos aquí una colección de siete actividades para trabajar las direcciones en el plano. Con ellas se puede desarrollar el vocabulario relativo a contraposiciones absolutas, como «arriba–abajo» o a la «izquierda–a la derecha».

En todas ellas, salvo en la n.º 2, se proporciona una tabla con cuatro filas de dibujos o símbolos, todos iguales pero colocados en diferentes posiciones. Mediante la herramienta LÁPIZ, los niños deberán rodear la figura adecuada de cada fila. Todas las figuras son orientadas, de modo que es posible precisar su posición. Apretando el botón OTRO se cambia la posición de las imágenes.

La manera más sencilla de trabajar es pedirles a los niños que rodeen la figura que está en la misma posición que la de la primera columna, que viene destacada en todas las actividades.

Sin embargo hay muchas más posibilidades. Por ejemplo, se puede proponer que describan la diferencia entre la primera y la segunda figura de cada fila. O se les pueden dar consignas como «rodea la figura simétrica de la primera figura, como si se viera en un espejo» trabajando así la simetría axial además de las posiciones.



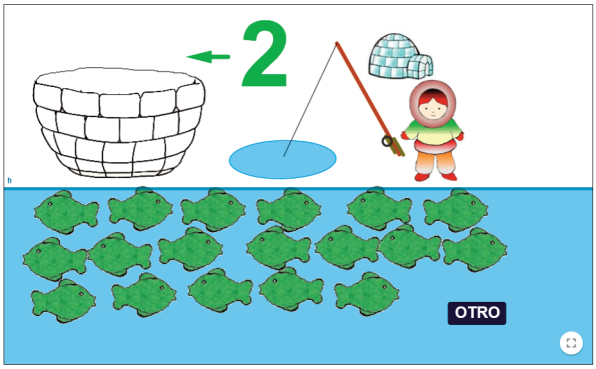


En la actividad dos, el modo de trabajo cambia: de la colección de mariquitas disponible a la derecha hay que seleccionar aquella cuya dirección coincide con la flecha que aparece a la izquierda. El dibujo que representa a la mariquita es orientado, ya que la presencia de la cabeza nos indica cuál es la parte de «delante» o «arriba».

Las actividades 1 y 2 utilizan imágenes reconocibles: mariquitas, pájaros, bebés o peces. Por ello son adecuadas para los más pequeños. De la 3 a la 7, las figuras utilizadas son letras y números, todas ellas orientadas (no se emplea, por ejemplo, el 0, el 8 o la o). Las distintas orientaciones, además de trabajar las posiciones en el plano, apoyan la correcta lectoescritura de cifras y letras y promueven que los alumnos se centren en las propiedades de las figuras, incrementando su atención.

De pesca

El escenario de esta actividad muestra a un esquimal pescando peces que deberán ser colocados en un cesto. En cada jugada, a la que se accede apretando el botón OTRO, aparece un número entre 1 y 9 y una flecha horizontal que alterna dos direcciones.



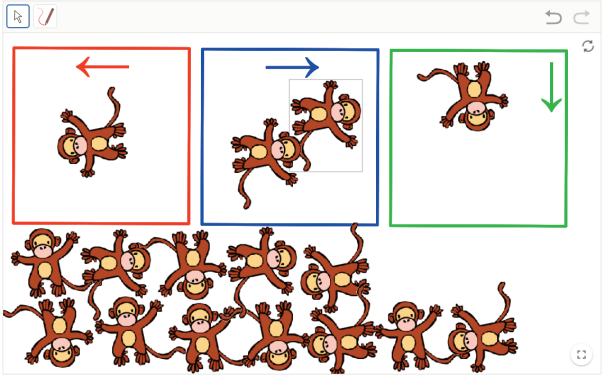
Los niños deben contar y mover dentro del cesto tantos peces como indica el número. Estaríamos ante una actividad de cardinalidad con recuento, de construcción, ya que deben formar dentro del cesto un conjunto de cardinal dado de peces.

Junto con el mencionado número aparece una flecha que indica la orientación de los peces que deben moverse, ya que estos son objetos orientados, pues tienen cabeza y cola, por lo que permiten también trabajar las posiciones, apareciendo la contraposición absoluta «a la izquierda–a la derecha». El cambio en la posición de los peces es exclusivamente horizontal, por lo que solo aparecen estos invariantes.

La herramienta LÁPIZ permite realizar más actividades, rodeando aquellos peces que indique la consigna del docente, como, por ejemplo, «rodea todos los peces que miren a la derecha».

Clasifica los monos

En esta actividad aparece un conjunto de monos, todos iguales, pero cuya posición ha sufrido un giro de 0º, 90º, 180º o 270º respecto de la posición inicial. Esta última se reconoce porque, al ser objetos orientados, con cabeza y cola, intuitivamente se considera la posición con la cabeza arriba como la inicial.

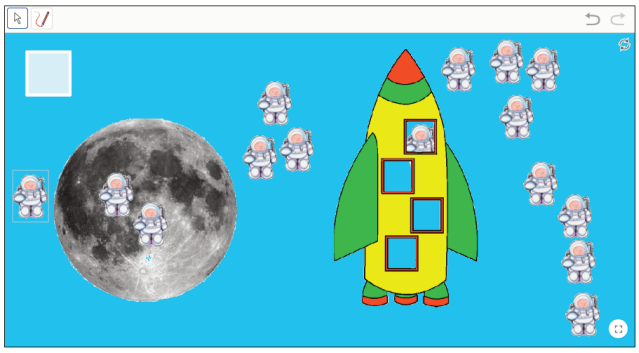


El resultado de estos giros, la orientación de los monos, nos permite trabajar el vocabulario de los contrapuestos absolutos «arriba–abajo» y «a la izquierda–a la derecha».

Además, en la escena tenemos tres cajas con unas flechas indicativas de qué monos tenemos que meter dentro, en función de la orientación que marcan (izquierda, derecha y abajo). Por ello, esta actividad nos propone realizar una clasificación con la orientación de los monos como criterio de la misma. Solo los monos «originales» (que están en posición vertical, de pie) quedarán fuera de las cajas, formando en sí mismos una clase.

Entre la Luna y la nave

Esta actividad nos permitirá trabajar contrapuestos relativos como «encima de–debajo de», «a la derecha de–a la izquierda de», «sobre–bajo», «delante de–detrás de», etc.



La escena es de un funcionamiento muy sencillo: aparece la Luna en una posición fija, una nave espacial, también fija, con diversas ventanas a través de las cuales se puede ver lo que hay detrás, y un montón de astronautas que se pueden mover. La propuesta es que el docente lance consignas sobre la posición relativa que deben tener los astronautas respecto a la Luna, a la nave o a ambas. Finalmente, con la herramienta lápiz se pueden rodear elementos o escribir una cifra en el recuadro de arriba a la izquierda. Esta cifra representaría el resultado de un recuento demandado por el docente. Por ejemplo, la aplicación podría utilizarse con la pizarra interactiva en gran grupo. Los niños irían saliendo a colocar un astronauta (o varios) en una posición dada, a requerimiento del docente. Una vez colocados todos donde se deseara, se podrían hacer preguntas como «¿cuántos astronautas hay entre la Luna y la nave?», o «¿cuántos astronautas hay sobre la Luna?», o «¿cuántos astronautas hay a la derecha de la nave?», etc.

Coloca las flores

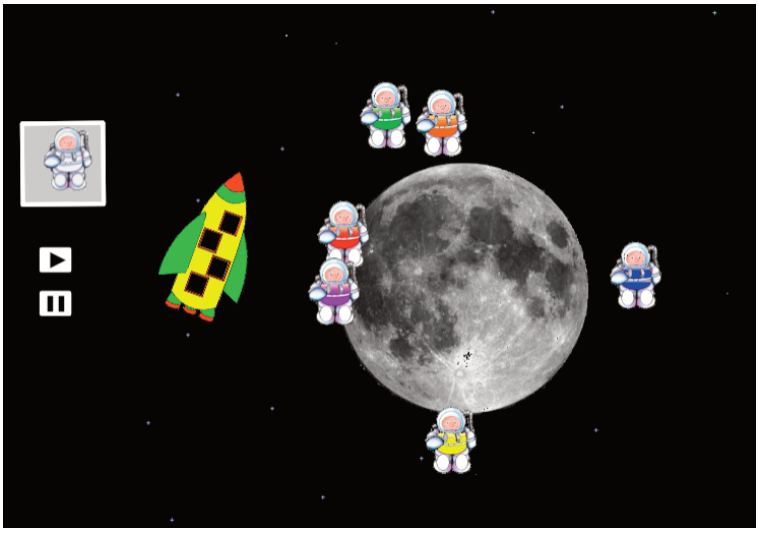
Esta aplicación también permite trabajar las contraposiciones relativas «encima de–debajo de y entre». La escena muestra las ramas de un almendro entre las que aparecen aleatoriamente dos pájaros (uno arriba y otro abajo) o solamente uno (bien en la parte de arriba, bien en la de abajo). Además, los alumnos disponen de un montón de flores (pequeñas y grandes). Junto a ellas aparece un número (cardinal del conjunto de flores que tienen que poner) y una flecha vertical, apuntando hacia arriba, hacia abajo o en ambos sentidos.

La actividad consiste en que los niños pongan tantas flores como indica el número en la posición relativa a los pájaros que indica la flecha (encima de ellos, debajo de ellos o entre ellos).

Como hay flores de dos tamaños, también se puede aprovechar la actividad para trabajar los términos comparativos de tamaño o de área «más grande» y «más pequeño».

Alrededor de la Luna

En esta actividad disponemos de seis astronautas con trajes de colores que orbitan en torno a la Luna, junto a su nave que también orbita pero en sentido contrario. Estos movimientos se activan y desactivan con los botones de MARCHA (▶) y PAUSA (❚❚) que hay en la escena. La propuesta de trabajo pasa por verbalizar las posiciones de los distintos astronautas respecto a la Luna y a la nave, por lo que volvemos a implementar las contraposiciones relativas nombradas anteriormente.



El docente podría plantear varias posibilidades con esta aplicación. Comentamos algunas aquí:

— El niño que sale a la pizarra interactiva para el movimiento cuando él quiere y el docente plantea preguntas sobre la posición de la nave, relativa a la Luna y de los astronautas respecto a la Luna y a la nave. Por ejemplo: «¿dónde está el astronauta rojo?», y los niños responden «entre la nave y la Luna».
— El docente lanza una consigna del estilo de «para el movimiento cuando el astronauta amarillo esté a la derecha de la luna», y el niño debe parar el movimiento cuando reconoce dicha posición.
— Como los astronautas admiten movimiento manual, el docente puede parar el movimiento y pedir a los niños que coloquen a los astronautas de determinados colores en posiciones dadas, con consignas como «coloca el astronauta verde a la izquierda de la Luna».
— Por último, en la esquina superior izquierda hay una colección de astronautas sin color para seguir trabajando con ellos las contraposiciones. Estos se pueden colocar detrás de la nave, de manera que «asoman» por las ventanas.

En el próximo artículo completaremos la colección de actividades en relación a este tema, con aplicaciones sobre los invariantes métricos.

Referencias bibliográficas

Alsina, Á. (2015), «Panorama internacional contemporáneo sobre la educación matemática infantil», *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 42, 210-232.

Alsina, Á., M. L. Novo y A. Moreno (2016), «Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil», *EDMA0-6 Educación Matemática en la Infancia,* Vol. 5, n.º 1, 1-20.

Clements, D. H., y M. T. Battista (1992), «Geometry and spatialreasoning.», en D. A. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: MacMillan 420-464. Tomado de Camargo Uribe, L. (2011), «El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría», *Revista Colombiana de Educación*, n.º 60.

NCTM (2003), *Principios y estándares para la educación matemática*, SAEM Thales, Sevilla.

A vueltas con la circunferencia (y el círculo)

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

El origen etimológico de la palabra geometría es bien conocido por todo el mundo y surge de la creencia griega (que nos ha llegado por Herodoto) de que esta disciplina se originó por la necesidad de los egipcios de medir sus tierras adecuadamente tras cada una de las periódicas crecidas del Nilo. Sea esto cierto o no, en el *Papiro de Rhind* ya aparecen numerosos problemas relacionados con el cálculo de áreas de diversas figuras planas: triángulos, rectángulos, trapecios, etc. También se dedica algo de tiempo a dar valores aproximados para la medida de la superficie de un círculo, como el siguiente:

> Ejemplo de un campo redondo de 9 *khet* de diámetro. ¿Cuál es su área? Quita 1/9 del diámetro, o sea 1; quedan 8. Multiplica 8 veces 8; sale 64. Por tanto contiene 64 *setat* de tierra.

No nos interesa ahora analizar el grado de exactitud de la fórmula que está implícita en el proceso anterior (aunque el lector interesado puede detenerse a hacerlo). Lo que nos resulta curioso, e improbable, es que hubiera en Egipto campos circulares.

Parece poco razonable pensar que el intenso y antiguo interés de la humanidad por la forma circular pueda fundamentarse en necesidades relacionadas con la agrimensura. Más factible resulta que dicho interés se explique en base a otro de los contextos en los que pudo originarse la geometría: las observaciones astronómicas. En todo caso, desde el inicio mismo del estudio de lo que hoy se llama geometría, la circunferencia y el círculo han estado presentes y han formado parte del currículo. En este texto vamos a prestar especial atención al modo en que se han introducido, presentado o definido los conceptos de circunferencia y círculo a lo largo del tiempo.

Por supuesto, ambos conceptos están indisociablemente unidos. Sin embargo, incluso antes de dar definición alguna, hay una pregunta que hacerse y, por tanto, una toma de posición que efectuar: ¿Existe algún tipo de jerarquía entre ambos conceptos? Y, si es así, ¿cuál de ellos está subordinado al otro? En términos generales, como se apreciará en los ejemplos que aparecen más adelante, se podrán distinguir tres posturas diferenciadas:

— Dar prioridad a la circunferencia y considerar el círculo como «lo que está encerrado por una circunferencia».
— Dar prioridad al círculo y considerar la circunferencia como «lo que bordea a un círculo».
— No dar prioridad a ninguno de los dos, presentándolos de forma paralela y simultánea.

Dicho esto, otros aspectos interesantes sobre los que conviene reflexionar son, en primer lugar, la necesidad de definir explícitamente un objeto y, en segundo lugar, qué significa definir un concepto abstracto. Este segundo aspecto es más complicado de lo que parece y nos llevaría por la senda de la filosofía. El primero, como matemáticos, lo tenemos completamente asumido desde Euclides. Que el discurso matemático debería comenzar con una definición explícita (sea lo que sea eso) es casi un axioma cuya validez nos planteamos muy pocas veces.

No siempre ha sido así. En el ya mencionado *Papiro de Rhind* se calcula el área de campos redondos sin decir explícitamente qué se entiende por redondo. Lo mismo sucede en el *Jiu Zhang Suan Shu* chino y en otros textos antiguos. En estos textos se asume que el lector ya posee una imagen mental de lo que se entendía por redondo de manera que resulta innecesario para la finalidad que se persigue tratar de definir formalmente el concepto. Este tipo de aproximación la podemos encontrar mucho más recientemente. Por ejemplo, en la figura 1, vemos cómo se presentaban el círculo y la circunferencia a estudiantes de 6-7 años de edad en un texto de SM del año 1966.

Figura 1. Texto de SM de 1966

Como vemos, se proporcionan en paralelo tanto figuras *abstractas* como dibujos de objetos reales. Sin embargo, se presentan las imágenes de forma ostensiva, sin ningún tipo de discurso. El esfuerzo del autor del libro aquí está más en *dar nombre* que en caracterizar o definir formalmente. A este respecto, bastantes años antes, en 1932, el profesor José María Eyaralar (formador de maestros, becado por la Junta de Ampliación de Estudios durante la II República para formarse en Francia, encarcelado, depurado y degradado por la dictadura) en su *Metodología de la Matemática* escribió:

> Para llegar a la definición de circunferencia puede partirse del estudio de una rueda […] La observación o la construcción, o ambas operaciones, deben, pues, preceder a toda definición.

Por supuesto, en el caso que nos ocupa, la definición formal que todos conocemos aparece ya en la Definición 15 del Libro I de los *Elementos* de Euclides:

> Un círculo es una figura plana comprendida por una sola línea llamada circunferencia de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.

Y la sombra de Euclides es alargada. Frente a la posición anterior de Eyaralar podemos encontrar textos igualmente destinados a la educación primaria que adoptan una postura mucho más formal. Es el caso, por ejemplo, de los *Elementos de Geometría Puestos al Alcance de los Niños* que publicó en 1865 don Esteban Paluzie y Cantalozella. Allí, se lee sin más preámbulos:

> ¿Qué es círculo?
> Círculo es una figura reentrante en sí misma, cuyos puntos distan todos igualmente de uno interior situado en el plano.

No aparecen objetos reales, ni se define el concepto de circunferencia; a pesar de que el término aparece inmediatamente en el texto con un significado desconocido (aunque sobreentendido).

Al presentar el concepto formalmente, sin apoyo en la realidad, el autor se ve en la necesidad de verbalizar el carácter curvo de la figura. De ahí esa extraña expresión utilizada de «figura reentrante en sí misma». Pese a que pueda resultar una expresión extraña, la encontramos también utilizada por matemáticos de la talla de José Mariano Vallejo en su *Tratado Elemental de Matemáticas* (1812), cuyos destinatarios no eran precisamente infantiles.

En todo caso, y por mucho que nos parezca que esta definición es totalmente clara, lo cierto es que muchos autores se han visto en la necesidad de proporcionar diversas aclaraciones. Juan Pérez de Moya, en su *Tratado de Geometria Practica, y Speculatiua* de 1573 consideró oportuno incluir las aclaraciones que vemos en la figura 2.

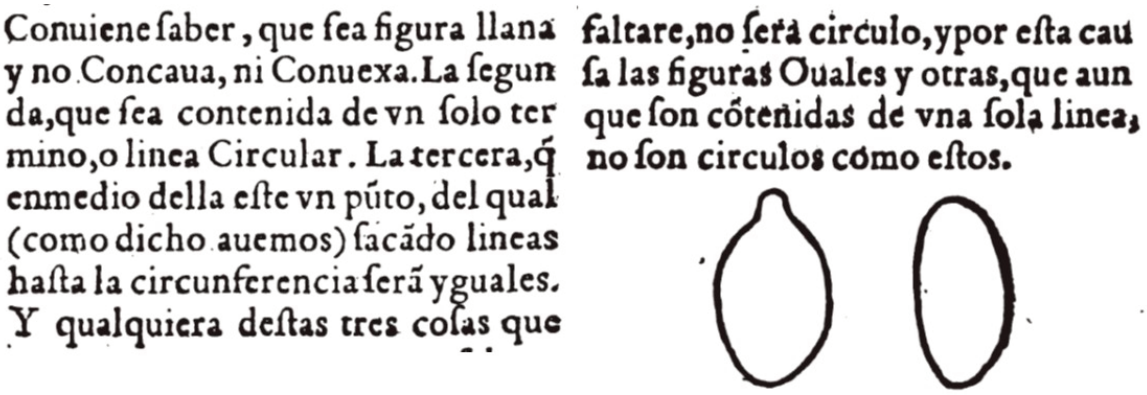

Conuiene ſaber, que ſea figura llana y no Concaua, ni Conuexa. La ſegunda, que ſea contenida de vn ſolo termino, o linea Circular. La tercera, q̃ enmedio della eſte vn pũto, del qual (como dicho auemos) ſacãdo lineas haſta la circunferencia ſerã yguales. Y qualquiera deſtas tres coſas que faltare, no ſera circulo, y por eſta cauſa las figuras Ouales y otras, que aunque ſon cõtenidas de vna ſola linea, no ſon circulos como eſtos.

Figura 2. Aclaraciones de Juan Pérez de Moya

Los ejemplos que hemos visto hasta ahora presentan una visión estática de la circunferencia y el círculo. Sin embargo, también es posible encontrar ya desde antiguo definiciones con un marcado carácter dinámico. En la figura 3, por ejemplo, vemos la definición que aparece en *La Géométrie Pratique* (1684) del francés Jacques Ozanam.

Como se puede observar, el círculo es «causado» por el movimiento del radio; de modo que esta forma de definirlo evoca el procedimiento de construcción o de dibujo de la figura. Mucho más explícito a este respecto es el también francés Alexis Claude Clairaut quien, en sus *Élémens de Géométrie* de 1741, da la siguiente definición (mi traducción):

> La circunferencia es el trazo completo que describe la punta móvil de un compás mientras gira en torno a la otra punta.

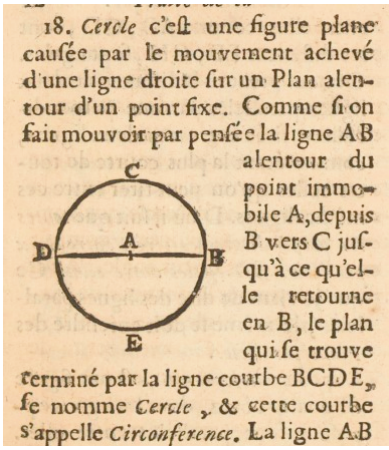

18. *Cercle* c'eſt une figure plane cauſée par le mouvement achevé d'une ligne droite ſur un Plan alentour d'un point fixe. Comme ſi on fait mouvoir par penſée la ligne AB alentour du point immobile A, depuis B vers C juſqu'à ce qu'elle retourne en B, le plan qui ſe trouve terminé par la ligne courbe BCDE, ſe nomme *Cercle*, & cette courbe s'appelle *Circonference*. La ligne AB

Figura 3. Definición de Ozanam

En la España del siglo XVIII algunos autores adoptaron este enfoque. Así, en la figura 4 vemos la definición que da Antonio Gregorio Rosell Viciano en su libro de 1784 *La Geometría de los Niños*.

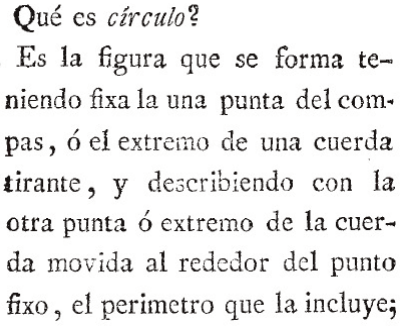
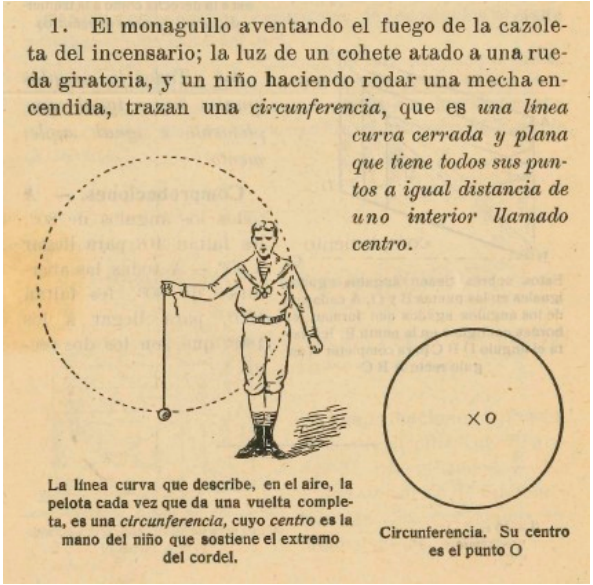

P. Qué es *círculo*?
R. Es la figura que se forma teniendo fixa la una punta del compas, ó el extremo de una cuerda tirante, y describiendo con la otra punta ó extremo de la cuerda movida al rededor del punto fixo, el perimetro que la incluye;

Figura 4. Definición de Antonio Gregorio Rosell Viciano

En ocasiones, este enfoque dinámico se combina con la referencia explícita a situaciones reales que hemos comentado anteriormente. En la figura 5 reproducimos un fragmento del libro de *Geometría de grado elemental* de Juan B. Puig (director de las escuelas de beneficencia de Zaragoza a principios del siglo XX).


1. El monaguillo aventando el fuego de la cazoleta del incensario; la luz de un cohete atado a una rueda giratoria, y un niño haciendo rodar una mecha encendida, trazan una *circunferencia*, que es *una línea curva cerrada y plana que tiene todos sus puntos a igual distancia de uno interior llamado centro.*

La línea curva que describe, en el aire, la pelota cada vez que da una vuelta completa, es una *circunferencia*, cuyo *centro* es la mano del niño que sostiene el extremo del cordel.

Circunferencia. Su centro es el punto O

Figura 5. Texto de Juan B. Puig

Otro posible modo de concebir la circunferencia o el círculo, cuyo origen se puede rastrear al menos hasta Arquímedes, consiste en imaginar un polígono con un número infinito de lados. El mismo Juan B. Puig lo explicaba así a sus alumnos tratando de recurrir a una situación que pudiera resultarles cercana:

> Cuando el carpintero quiere hacer una barra cilíndrica o redonda, toma un listón cuadrado; con el cepillo mata los cuatro vértices, y hace, de cada uno, dos. El polígono, que era antes un cuadrado, pasa a ser octógono; después, de 16 lados; luego, de 32, y así, sucesivamente. Cuando los lados son infinitos, el perímetro es una circunferencia, y el polígono que encierra se llama círculo.

Así pues, hemos visto que un concepto aparentemente sencillo y elemental, cuya definición podría considerarse trivial y accesible, ha recibido un tratamiento muy diverso a lo largo de la historia. Los destinatarios del texto, las creencias y concepciones del autor e incluso las modas o corrientes predominantes en una época concreta son variables que han influido de forma determinante sobre el modo en que se han presentado históricamente los conceptos de círculo y circunferencia. Este fenómeno es común y transversal a prácticamente cualquier contenido; y debería llevar a una reflexión sobre la supuesta objetividad e inmutabilidad de las ideas matemáticas y sobre si estas son independientes o no del modo en que se presentan.

Criptografía para principiantes: Método de Playfair (Wheatstone)

por
Óscar Carrión Lostal
(IES Valdespartera)

Ya en anteriores artículos sobre «Criptografía para principiantes» vimos distintos métodos de cifrar y descifrar mensajes, con actividades dirigidas a alumnos y alumnas de último ciclo de Primaria y primer ciclo de Secundaria. En este nuevo artículo vamos a tratar el método de Playfair.

Para desarrollar este método en clase la propuesta didáctica es la siguiente:

— Introducción histórica.
— Reglas del método.
— Cifrado y descifrado de mensajes sin/con clave.

Playfair y Wheatstone

Este método lleva por nombre Playfair ya que fue el que se lo presentó a las autoridades inglesas, aunque el verdadero inventor del método fue su amigo el físico Charles Wheatstone, que lo creó para realizar comunicaciones telegráficas secretas en el año 1854, y se utilizó durante la Primera Guerra Mundial.

Charles Wheatstone fue un inventor y científico inglés del siglo XIX muy conocido por el aparato eléctrico que lleva su nombre, el *puente de Wheatstone*, que sirve para medir la resistencia eléctrica.

El método usa una matriz alfabética 5×5 donde se incluyen las letras del alfabeto inglés (25 de las 26 letras). En castellano el alfabeto tiene 27 letras, por tanto adaptaremos dicha tabla haciendo que las letras N y Ñ, y las letras V y W ocupen la misma celda dentro de la tabla.

Figura 1. Charles Wheatstone

Figura 2. Lyon Playfair

La siguiente tabla es la que se usa para el método sin clave:

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N/Ñ	O
P	Q	R	S	T
U	V/W	X	Y	Z

El método de cifrado de Playfair es un método de sustitución que cifra pares de caracteres o letras, mediante una tabla (sin/con clave).

Las reglas para cifrar una secuencia de caracteres son las siguientes:

— El número de caracteres tiene que ser par. Si fuera impar se debe añadir una letra *nula*, por ejemplo la letra *x*. Como ejemplo vamos a codificar la palabra «matemáticas» que tiene 11 letras. Por ello le añadiremos al final una *x*, y por tanto se codificará la palabra «matemáticasx», que ya tiene 12 letras.

— Se separa en pares de letras la palabra o texto a codificar. Si entre esas parejas aparece alguna con letras repetidas hay que romper dicha repetición introduciendo una letra nula entre ellas, por ejemplo la letra *x*. Si al final nos saliera un número impar de letras, también habría que añadir al final de la secuencia otro carácter nulo, es decir, una letra *x*.

Una vez hecho los pasos previos anteriores, se aplican las siguientes reglas para codificar la secuencia de caracteres que queremos codificar:

— Si los dos caracteres o letras se encuentran en la misma fila de la tabla, se eligen los caracteres situados a su derecha, teniendo en cuenta que esta operación de ir a la derecha es módulo 5. Así que al codificar la pareja AE se convierte en BA, ya que a la derecha de la A está la B y a la derecha de la E está la A. Al ir a la derecha de la letra E, que es la última de la primera fila de la tabla, volvemos a empezar de forma cíclica la fila, por lo que la secuencia es A–B–C–D–E–A–…

— Si los dos caracteres o letras se encuentran en la misma columna, se eligen los caracteres situados justamente debajo de ellos, operación módulo 5 también. Así FU se convertirá en KA, ya que debajo de la letra F está la letra K y debajo de la letra U está la letra A, ya que es al seguir la primera columna cíclicamente, la secuencia es A–F–K–P–U–A–…

— Si los dos caracteres o letras se encuentran en filas y columnas distintas, entonces se forma el rectángulo en el que los extremos de una de sus diagonales la forman los dos caracteres a codificar, mientras que los extremos de la otra (leídos en el orden de filas de la tabla) serán los que la sustituyan en la codificación. Así la pareja GR se codifica como HQ.

Una vez expuestas las *reglas de juego* pasamos a codificar la secuencia de caracteres: «matemáticasx» (12 letras). Para ello debo codificar los pares de letras: MA–TE–MA–TI–CA–SX.

Como no se repite ningún par de caracteres una vez separados de dos en dos, estamos en condiciones de proceder a su cifrado:

MA: Como se encuentran en distintas filas y columnas, se forma el rectángulo correspondiente y obtenemos como cifrado KC.

TE: Se encuentran en la misma columna por lo tanto los debemos sustituir por los que están justamente debajo, teniendo en cuenta el recorrido cíclico de la columna, y obtenemos como cifrado ZJ.

MA: Ya la hemos codificado antes.

TI: Como se encuentran en distintas filas y columnas, se forma el rectángulo correspondiente y obtenemos como cifrado SJ.

CA: Se encuentran en la misma fila por lo tanto los debemos sustituir por los que están justamente a su derecha, teniendo en cuenta el recorrido cíclico de la fila, y obtenemos como cifrado DB.

SX: Como se encuentran en distintas filas y columnas, se forma el rectángulo correspondiente y obtenemos como cifrado RY.

Por tanto el cifrado de «matemáticasx» es KCZJKCSJDBSX.

Para conseguir un método más robusto, y que sea más difícil que nos descodifiquen los mensajes codificados, se puede utilizar una clave. Para ello se empieza a rellenar la tabla 5×5 anterior con las letras de la clave sin que se repita ninguna letra. Como ejemplo vamos a usar la palabra clave PLAYFAIR, en la que como vemos se repite la letra *a*. Por tanto al rellenar la tabla lo haremos con PLAYFIR y luego vamos añadiendo en orden todas las letras del alfabeto castellano, sin incluir las letras usadas ya con la clave, sin olvidar que debemos dejar en una misma celda las letras N y Ñ, y las letras V y W. Dicha tabla con su clave nos quedará ahora:

P	L	A	Y	F
I	R	B	C	D
E	G	H	J	K
M	N/Ñ	O	Q	S
T	U	V/W	X	Z

Las reglas a aplicar son las mismas que en el caso anterior. Como ejemplo volveremos a codificar la secuencia de caracteres «matemáticasx»:

MA: Como se encuentran en distintas filas y columnas, se forma el rectángulo correspondiente y obtenemos como cifrado OP.

TE: Se encuentran en la misma columna por lo tanto los debemos sustituir por los que están justamente debajo, teniendo en cuenta el recorrido cíclico de la columna, y obtenemos como cifrado PM.

MA: Ya la hemos codificado antes.

TI: Se encuentran en la misma columna por lo tanto los debemos sustituir por los que están justamente debajo, teniendo en cuenta el recorrido cíclico de la columna, y obtenemos como cifrado PE.

CA: Como se encuentran en distintas filas y columnas, se forma el rectángulo correspondiente y obtenemos como cifrado BY.

SX: Como se encuentran en distintas filas y columnas, se forma el rectángulo correspondiente y obtenemos como cifrado QZ.

Por tanto el cifrado de «matemáticasx» usando como clave PLAYFAIR es OPPMOPPEBYQZ.

Para descifrar secuencias de caracteres con el método de Playfair se siguen las reglas anteriores, pero ahora con el algoritmo inverso. Por lo tanto, las reglas para descifrar una secuencia de caracteres son las siguientes:

— Si los dos caracteres se encuentran en la misma fila, se eligen los caracteres situados a su izquierda, teniendo en cuenta que esta operación de ir a la izquierda es módulo 5.
— Si los dos caracteres o letras se encuentran en la misma columna, se eligen los caracteres situados justamente encima de ellos, teniendo en cuenta que esta operación de ir hacia arriba es módulo 5.
— Si los dos caracteres o letras se encuentran en filas y columnas distintas, entonces se forma el rectángulo en el que los extremos de una de sus diagonales la forman los dos carácteres del texto codifacado mientras que los extremos de la otra (leídos en el orden de filas de la tabla) serán los que corresponderán al texto descodificado.

Ejercicio 1. Descifrar la secuencia de caracteres ABBYDRQOKMIKTHBLOQ sabiendo que en su codificación con el método de Playfair se ha usando la clave PLAYFAIR (ver tabla anterior).

Ejercicio 2. Codificar la secuencia de caracteres «canalla» usando las tablas anteriores.

(Pista: la palabra que hay que codificar, por un lado tiene 7 caracteres y por otro al formar parejas de caracteres ca−na−ll−a, aparece la pareja de caracteres ll repetido. Por tanto debemos añadir un carácter de forma que sumen 8 caracteres y se rompa la repetición).

Ejercicio 3. Practica con distintas secuencias de caracteres para codificarlas y descifrarlas con las tablas que aparecen anteriormente.

Ejercicio 4. Inventad con otro compañero de clase vuestra propia tabla con una clave propia y practicad a cifrar y descifrar mensajes.

Conclusiones

Este método es también de sustitución al igual que el cifrado de César, lo único que en el método de Playfair se usan pares de letras o caracteres, en vez de ir de letra en letra. Al trabajar por pares de letras, si la secuencia a codificar o descifrar tiene un número impar de letras, hay que añadir una letra nula (en nuestro caso hemos usado la letra *x*). Ver la analogía con el método de la escítala, en el que si el número de letras era un número primo, se añadía un nuevo carácter, en este caso un guión (−), para que el número de caracteres fuera un número compuesto, y así tener divisores y más opciones de cuadrículas para codificar y decodificar mensajes. Además se usa también una tabla de 5×5 caracteres, lo que implica que se trabaje en módulo 5 (cíclico), ya sea por filas o por columnas. Al igual que en los métodos vistos con anterioridad, si queremos aumentar la seguridad del método, incluimos una clave: recordar que el cifrado de César si se incluye una clave se convertía en el método de Vinègere.

Referencias bibliográficas

Tábara, J. L. (s. f.) *Breve historia de la Criptografía Clásica*, descargada de <http://www.openboxer.260mb.com/asignaturas/criptografia/metodosCriptograficos.pdf?i=2>.

— *Criptografía clásica*, Playfair, consultada en <https://joseluistabaracarbajo.gitbooks.io/criptografia-clasica/content/Cripto14.html>.

Cifrado de Playfair (2021), en *Wikipedia*, recuperado el 30 de mayo de 2021 de <https://es.wikipedia.org/wiki/Cifrado_de_Playfair>.

Talleres de Conexión Matemática impartidos por el autor del presente artículo.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Mayo de 2021
ISSN: 2386-8821e