Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 44
Enero de 2022

La Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas (al igual que otras sociedades de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas) se creó en pleno apogeo del movimiento asociacionista en el Estado español, cuando en los primeros años ochenta la democracia buscaba asentarse. Se creía, y algunos aún lo creemos, que asociarse con personas que tienen intereses comunes es una buena estrategia para alcanzar ciertos objetivos. Por otra parte, entre los matemáticos ya existía una larga tradición en eso de agruparse bajo un paraguas común, desde aquel histórico «Matemáticos del mundo, ¡uníos!». Todo esto ha llevado a que no haya en España una estructura de ninguna otra materia que se aproxime siquiera a la de la FESPM: seminarios, publicaciones, congresos, premios ministeriales... (por cierto, este año hay JAEM en Valencia).

Nuestro objetivo es bastante claro: la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. En la SAPM pensamos que un pilar fundamental en nuestro quehacer ha de ser establecer mecanismos que favorezcan el intercambio de experiencias de aula entre el profesorado aragonés. Por eso, cada vez que convocamos una JEMA insistimos en lo importante que es el apartado de comunicaciones: ahí es donde nos podemos contar qué hemos hecho en clase que nos ha funcionado medianamente bien, de tú a tú, de igual a igual, sin necesidad de que seamos grandes expertos, pues para eso hay otros espacios.

Y, en esa misma línea, empezamos a publicar *Entorno Abierto* en enero de 2014. Tal y como pone en nuestra web, nuestro boletín es una «Publicación bimestral que aspira a ser un lugar de intercambio de experiencias en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, realizadas en Aragón». Al igual que en la JEMA buscamos la homologación para que quien cuenta sus experiencias tenga algún tipo de *gratificación* (en forma de puntos para el baremo), en este caso obtuvimos legalmente el ISSN y registramos la publicación en diferentes bases de datos. Pero, a pesar de todos los esfuerzos dedicados, la realidad se está imponiendo y, en los últimos tiempos, cuesta *llenar* estas páginas. No nos llegan colaboraciones de compañeros, a pesar de que somos conocedores de que hay innumerables actividades interesantes que se están implementando en las aulas. Algunas más modestas, otras menos, pero la mayoría valiosas. De seguir así, lamentándolo mucho, nos veremos obligados a dar por finalizado este periplo. Confíamos en que no tengamos que hacerlo debido a que nos lleguen más colaboraciones.

Un ejemplo de aportación al boletín. Antonio Oller lleva ya 12 entregas de su sección «Una mirada al pasado». Como suele ser costumbre en el autor, los artículos son brillantes e interesantes. Pero también están abiertos a posteriores desarrollos, planteando nuevas soluciones a los problemas o resolviendo aquellos que no lo estén. En esta ocasión, Oller invita explícitamente a hacerlo, incluso sugiriendo la herramienta. Sería fantástico poder publicar en *Entorno Abierto* soluciones enviadas por los lectores.

Por otra parte, tenemos próximo el día de las Matemáticas, el día Pi. Nuestro próximo número ha de editarse precisamente a finales de marzo, por lo que daría tiempo a reflejar lo que se haya hecho en los centros para conmemorar ese día. Así que os animamos a que compartáis con nosotros y con el resto de compañeros las actividades que llevéis a cabo.

Sorio Interactivo

Actividades para la enseñanza del sistema de numeración de base dos (binario)

Series... pero no serias

Dos problemas propuestos y olvidados

únete a la SAPM

click

Aprovecho para recordar la actividad *nueva* que hemos lanzado este curso. Se trata de organizar una *semana* de matemáticas en la calle. La idea es que cada día de la semana algún centro de Aragón *salga* a la calle, ponga unas mesas, y con la colaboración del alumnado, *ofrezca* actividades matemáticas a las personas que pasen por allí. Cada centro solo tendrá que salir un día a la calle, durante el tiempo que considere oportuno (una hora, toda la mañana...); el objetivo será completar la semana y que cada día haya al menos un centro de cada provincia dándole visibilidad. Ya hay algunos compañeros que se han animado, pero nos gustaría que hubiera más, claro. De centros de Huesca andamos escasos, pues solo contamos con uno en Jaca. Estaría bien tener al menos uno de la capital... Cuando se reciba este boletín, ya habremos tenido una primera reunión. Sin embargo, todavía estamos a tiempo de incorporar nuevos centros ya que aún estamos dando los primeros pasos. Si te animas, escribe a <sapmciruelos@gmail.com>. La actividad la llevaremos a cabo la semana del 9 al 15 de mayo (aprovechando que el 12 de mayo es el Día Escolar de las Matemáticas) y culminaremos el sábado en Teruel con una jornada de matemáticas en la calle (será la tercera), a la que desde ya os animo a acudir (ya lo recordaremos más adelante).

Lo que sí que goza de excelente salud son algunas de las actividades que planteamos para realizar con alumnos. Especialmente las olimpiadas, claro. Sí, en plural. El curso pasado ya pusimos en marcha la primera alevín (6.º de Primaria, y 5.º) y este lanzamos la primera para 4. de ESO (y 3.º). Se unen, lógicamente, a la más que asentada de 2.º de ESO (y 1.º). De esta forma cubrimos desde 5.º de Primaria hasta 4.º de ESO (la de Bachillerato pertenece al campo de acción de la RSME). Desde el pasado 17 de enero y hasta el 4 de febrero permanece abierto la inscripción de centros. Para poder inscribir alumnos es imprescindible haber inscrito previamente al centro. Aún no está del todo perfilado el formato de las diferentes fases, pendiente de la evolución de la pandemia y las restricciones que se vayan imponiendo o relajando. No obstante, los compañeros que están al frente de cada una de las olimpiadas, están trabajando duro para que salgan lo mejor posible. Haciendo clic en la siguiente imagen se puede acceder a la web de las olimpiadas, donde se encuentra toda la información.

También los compañeros que coordinan el programa Conexión Matemático están haciendo grandes esfuerzos para que el programa pueda desarrollarse por unos cauces lo más próximos posibles a la normalidad. Bien es cierto que, en este caso, los obstáculos no solo los pone el virus. En cualquier caso, han lanzado la convocatoria del IX Concurso de Radionovelas Matemáticas, cuyas bases se pueden consultar en la web, la cual sigue ofreciendo interesantes recursos:

DANIEL SIERRA RUIZ
Presidente de la SAPM

Actividades para la enseñanza del sistema de numeración de base dos (binario)

por
Óscar Carrión Lostal
(IES Valdespartera)

Aunque en el currículo de la asignatura de Matemáticas, tanto en primero como en segundo de ESO no aparecen explícitamente como contenido los sistemas de numeración, es del todo conocido por nuestra experiencia docente, que a nuestros alumnos les explicamos las diferencias entre un sistema de numeración posicional de otro no posicional, y se ven ejemplos de representación de números en distintas bases, en especial en base decimal y base binaria, aunque esta última se ve con más detalle en otras áreas como Tecnología, Informática o Electrónica.

Los objetivos que nos proponemos es que nuestros alumnos:

- Aprendan otro sistema de representación de números, en concreto, el de base dos, relacionándolo con el que ellos conocen, que es el sistema decimal o de base 10 y su importancia en campos como la tecnología, informática y la electrónica.
- Pasen de un sistema de representación a otro, en especial, aprendan a pasar de binario a decimal y de decimal a binario.
- Sepan ordenar los números tanto en decimal como en binario a través de una tabla y argumenten diferentes métodos para rellenar dichas tablas.
- A partir de las tablas anteriores, sean capaces de construir códigos, por ejemplo, que al pasar de un número a otro en representación binaria, tan solo varíe un bit (dicho código es muy usado en electrónica).
- Aprendan a sumar números en representación binaria.

Contexto

Para lograr alcanzar los objetivos propuestos anteriormente se les planteó a nuestros alumnos de tres grupos de 2.º de ESO, una serie de actividades que debían realizar en pequeño grupo (de 4 o 5 alumnos), durante tres sesiones de clase.

Anteriormente en clase se les había explicado todos los contenidos relacionados con las actividades que tenían que desarrollar en grupo, por lo que el trabajo realizado a lo largo de las tres sesiones era un repaso de lo visto con anterioridad.

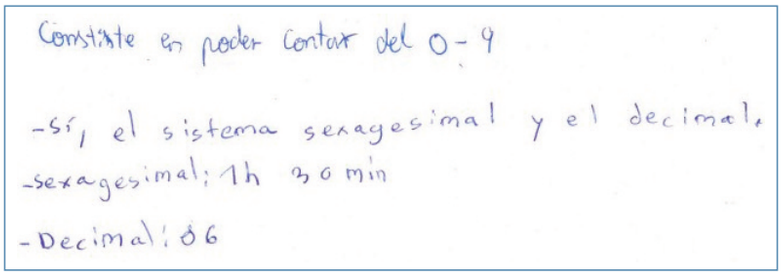
Resultados

A continuación, vamos a ir desglosando los resultados obtenidos y deteniéndonos en los ejercicios más novedosos respecto a lo que se hace habitualmente en este tópico en clase:

Ejercicio 1. Explica en qué consiste un sistema de numeración posicional y pon algún ejemplo. ¿Conoces algún tipo de sistema de numeración que no sea posicional?, indica cuál y pon algún ejemplo.

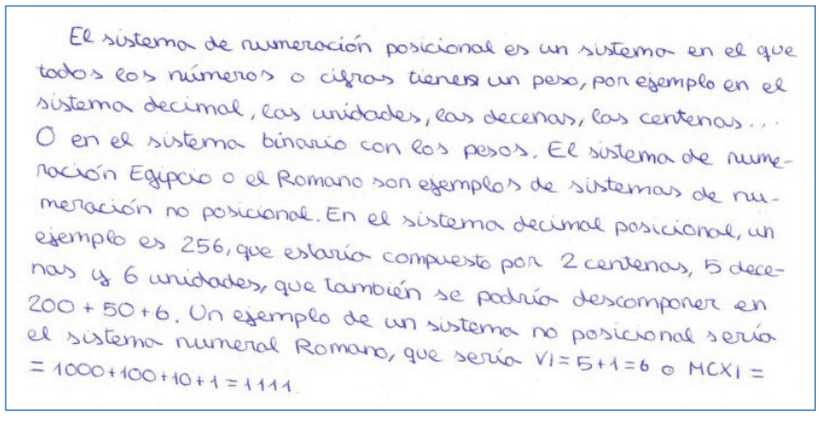
En general este ejercicio les salió bastante flojo, porque en general los alumnos no son capaces de expresar correctamente sus razonamientos de una forma clara y precisa, aspecto que estamos trabajando constantemente en clase, ya que es uno de los objetivos de la asignatura.

Ejemplo de respuesta errónea:


Consiste en poder contar del 0-9

-Sí, el sistema sexagesimal y el decimal.
-sexagesimal: 1h 30 min
-Decimal: 06

Ejemplo de respuesta válida:


El sistema de numeración posicional es un sistema en el que todos los números o cifras tienen un peso, por ejemplo en el sistema decimal, las unidades, las decenas, las centenas... O en el sistema binario con los pesos. El sistema de numeración Egipcio o el Romano son ejemplos de sistemas de numeración no posicional. En el sistema decimal posicional, un ejemplo es 256, que estaría compuesto por 2 centenas, 5 decenas y 6 unidades, que también se podría descomponer en 200 + 50 + 6. Un ejemplo de un sistema no posicional sería el sistema numeral Romano, que sería VI = 5+1=6 o MCXI = = 1000+100+10+1=1111

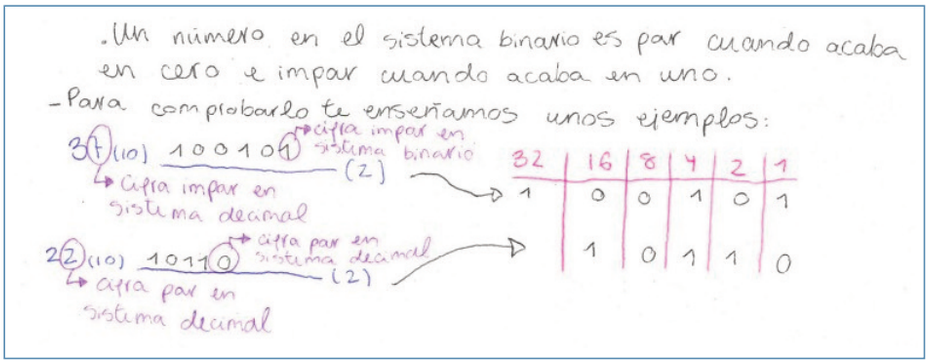
Los ejercicios 2 y 3 les salieron bien a nuestros alumnos ya que consistían en pasar de decimal a binario o viceversa, y es lo típico que se trabaja en clase con ellos. Cabe indicar que en el caso del paso de decimal a binario, lo hacían de las dos maneras indistintamente:

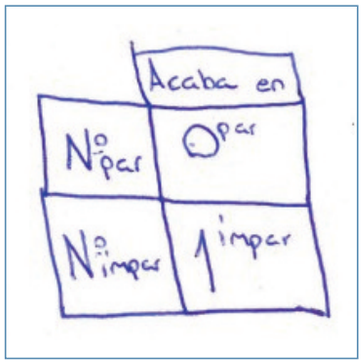
— Usando los pesos (potencias de 2) cuya suma fuera el número deseado.
— Ir dividiendo por la base (en este caso 2) hasta que el último cociente fuera menor que el divisor, formando el número tomando el último cociente y todos los restos de abajo a arriba.

Ejercicio 4. Al igual que en el sistema decimal sabemos que un número es par cuando acaba en {0, 2, 4, 6, 8} e impar cuando acaba en {1, 3, 5, 7, 9}. ¿Cuándo un número es par o impar en el sistema binario?
Ayuda: Fíjate en los ejercicios anteriores para sacar tus conclusiones.

En general todos los grupos realizaron bien dicho ejercicio, pero muchos de los grupos no supieron argumentarlo con los ejemplos de los ejercicios anteriores.

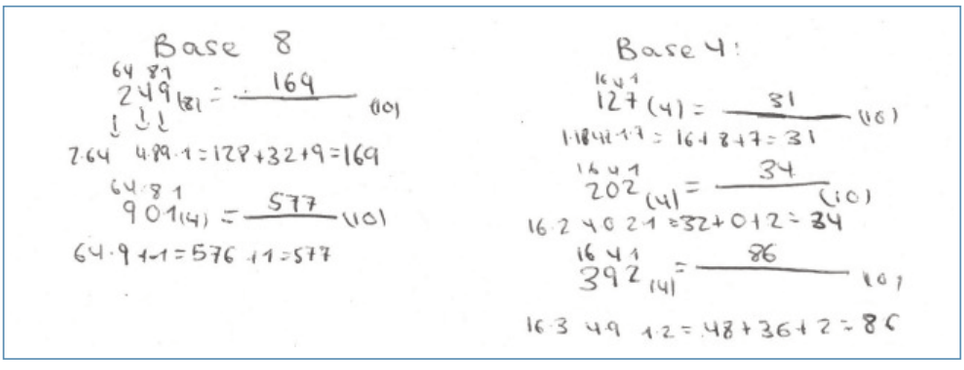
Ejemplos de respuesta argumentada (izquierda) y no argumentada (derecha):





Ejercicio 5. Basándote en lo que has aprendido sobre el paso del sistema de numeración decimal a binario y viceversa, invéntate y resuelve al menos cinco ejemplos, donde los sistemas de numeración no sean el decimal (base 10) y el binario (base 2). (Nota: Recuerda que otros sistemas de numeración que se usan en informática son el octal y el hexadecimal).

Muchos de los grupos se decantaron por pasar de una base cualquiera a la base decimal, y no viceversa. Y muchos de los errores que cometieron fue usar dígitos no permitidos en las bases escogidas, como puede observarse en este caso:



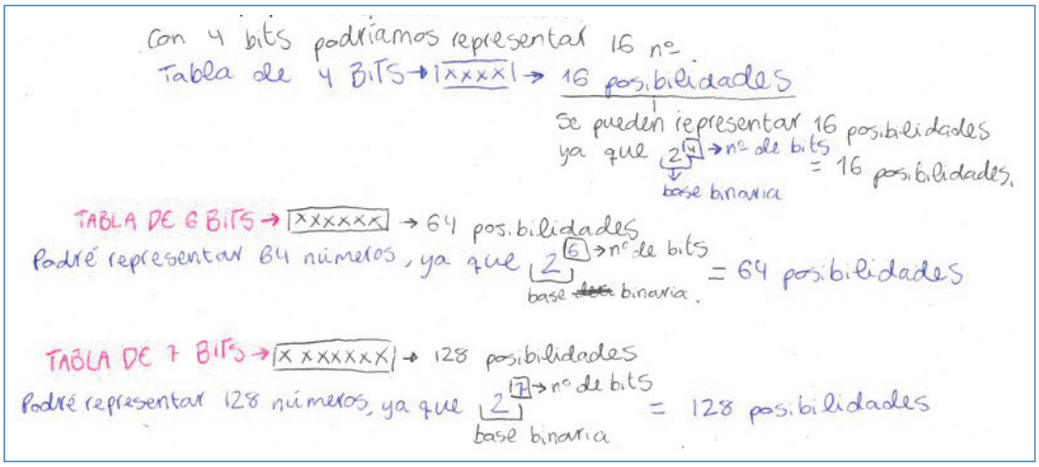
En los ejemplos de la columna izquierda, el primer caso 249(8), usa el dígito 9 que no es válido en la base 8, y en el segundo caso 901(4), el dígito 9 no es válido. En la columna de la derecha, en el primer caso 127(4), se usa el dígito 7 que no es válido en base 4, y en el último 392(4), el dígito 9 no es válido en base 4.

Ejercicio 6. Con cuatro bits, _ _ _ _ , ¿cuántos números podríamos representar?
Con seis bits, _ _ _ _ _ _, ¿cuántos números podré representar?, ¿cuál es el último?
¿Y si fueran siete bits? Razona tu respuesta.
¿Podrías obtener una fórmula, que relacione el número de bits (*n*) con la cantidad de números que podemos representar? Razona tu respuesta.

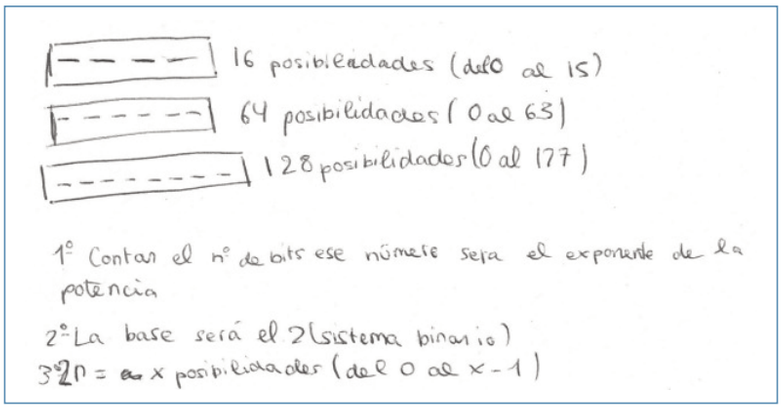
En general los alumnos contestaron bien a este ejercicio, ya que en clase se había hecho hincapié constantemente en las potencias de dos.

Aun así hubo un pequeño porcentaje que contestó mal, y de los que contestaron bien, un pequeño porcentaje no razonó bien la respuesta. Y ninguno de ellos supo expresar de qué número a qué número se podía representar en forma de fórmula.

Respuesta argumentada del número de posibilidades, pero sin indicar de qué número a qué número se pueden representar:



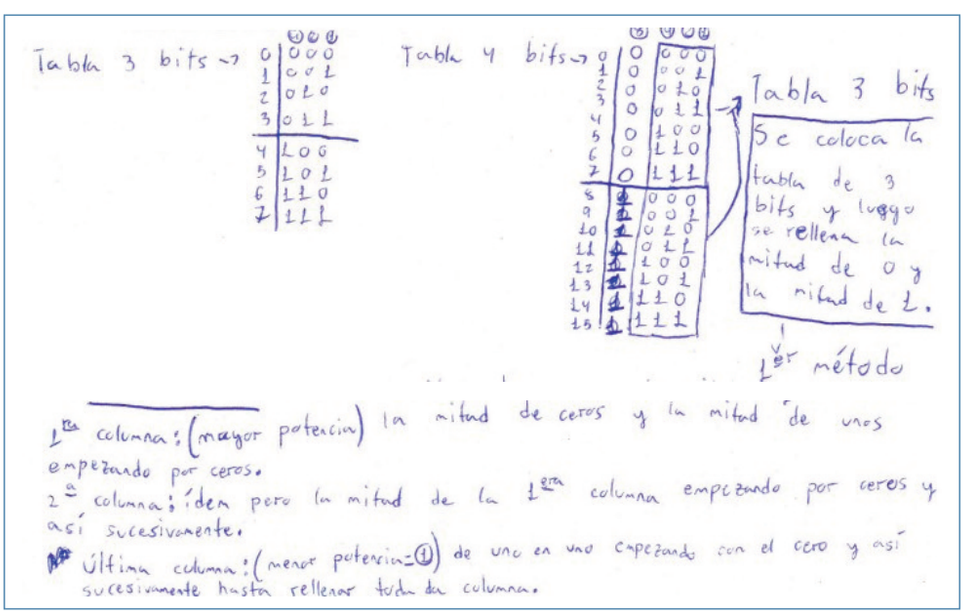
Respuesta correcta indicando el número de posibilidades y de qué número a qué número se pueden representar, sin argumentar, pero indicando el procedimiento a seguir:



Ejercicio 7. Ya sabes realizar tablas donde se relacionan los números en decimal con los números expresados en binario. Si nos fijamos por ejemplo en la tabla de tres bits y la de cuatro bits, ¿hay alguna relación entre ellas? Expresa el método de cómo construir dichas tablas con el lenguaje matemático preciso correspondiente. ¿Hay más de un método? Descríbelos.

Un pequeño porcentaje del alumnado contestó mal a la pregunta, y una de las causas es que lo confundieron con el siguiente ejercicio, el de variar un dígito entre un número y otro en binario, ya que no prestaron atención al enunciado del ejercicio.

Respuesta correcta:



Una forma de ordenar grupos de *bits,* muy importante en electrónica, es aquel que solo cambie un único *bit* de un estado (un número) a otro (otro número). Con anterioridad a que se les propusiese el ejercicio 8 a los alumnos, que trata de este tópico, se les explicó brevemente el método o procedimiento correspondiente aplicado al caso de dos bits.

Deben fijarse en la tabla de dos bits ordenada del 0 al 4:

00	01	10	11

La ordenación natural de los números binarios no cumple las condiciones que exige este criterio, ya que del número (01) al (10) cambian dos dígitos, el dígito de la izquierda vemos que el 0 se convierte en 1, y el dígito de la derecha, vemos que el 1 se convierte en un 0.

¿Se podrían ordenar los cuatro números anteriores, de forma que solo cambie un bit de un número a otro de forma cíclica, es decir, también se tiene que cumplir del último número al primero? La respuesta es que sí, ya que si los ordenamos de la siguiente manera tan solo varía un dígito al pasar de un número a otro:

00	01	11	10

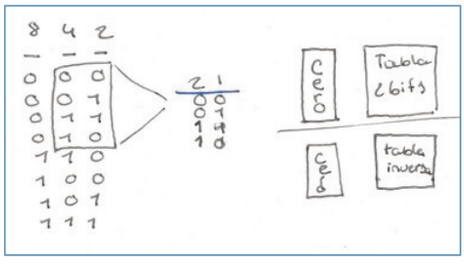
Ya que del primer número al segundo solo cambia el dígito de la derecha, del 0 al 1 (en rojo), del segundo número al tercer número cambia el dígito de la izquierda, del 0 al 1 (en azul), del tercer número al cuarto cambia el dígito de la derecha, del 1 al 0 (en verde), y del último número al primero cambia el dígito de la izquierda, del 1 al 0 (en morado).

Al ser cíclico, hay muchas soluciones. Otra solución por ejemplo sería ordenarlos así: 01−11−10−00, o cualquiera que se nos pudiera ocurrir…

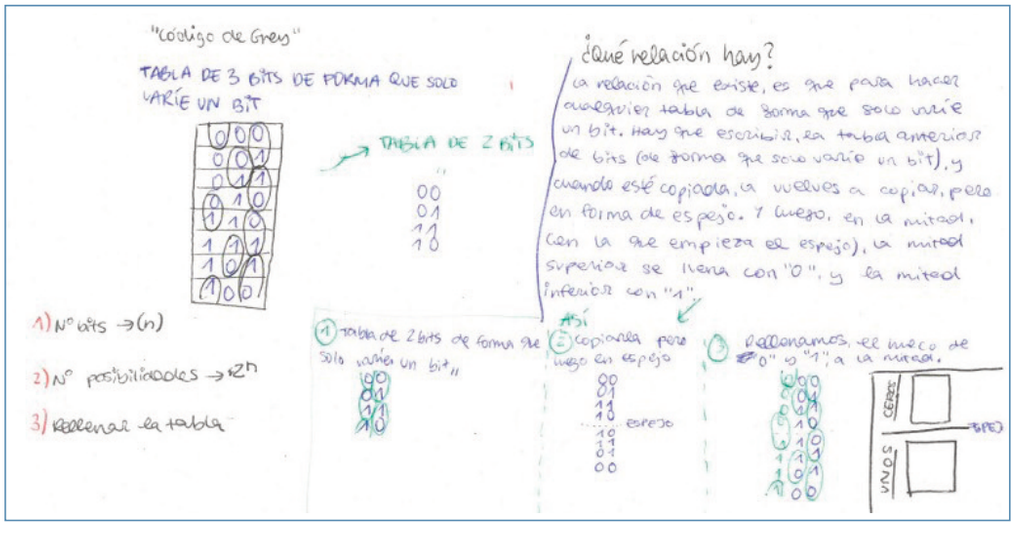
Ejercicio 8. ¿Serías capaz de ordenar según este criterio los números de tres bits? Para ello empieza por el 000. Una vez que tengas la tabla de tres bits ordenada según este criterio, ¿hay alguna relación entre la tabla de dos bits y la que has construido de tres bits? Expresa el método que hay que emplear para construir dichas tablas con el lenguaje matemático preciso correspondiente.

Este ejercicio les costó más tiempo realizarlo, ya que tuvieron que ir probando hasta que obtuvieron la solución. Se debe incidir en que los alumnos no tienen la capacidad interiorizada de ir probando distintas estrategias en la resolución de problemas, en especial la de ensayo y error, hasta alcanzar la solución deseada, ya que tan solo les preocupa que se les dé inmediatamente el método o solución del problema. Por ello, conviene trabajar sobre este aspecto constantemente con ellos en clase.

Respuesta esquemática:

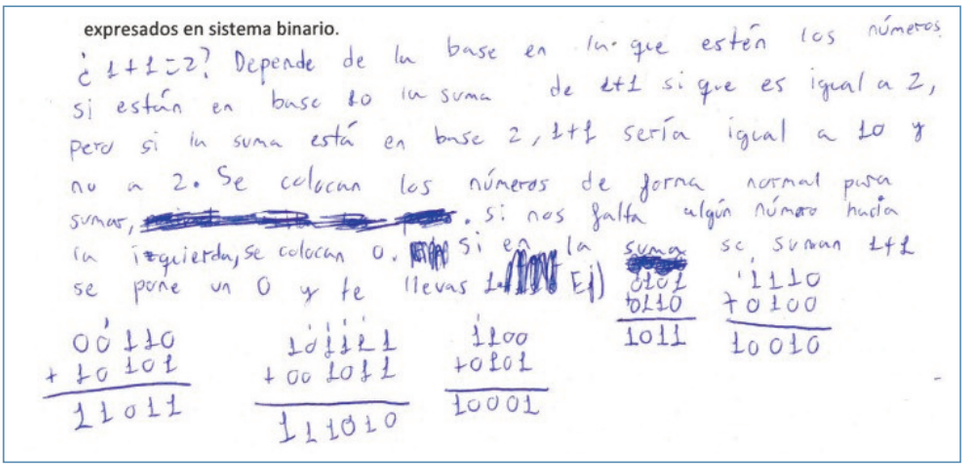


Respuesta argumentada y explicada, además de esquemática:



Ejercicio 9. Por último una última pregunta, ¿1 + 1 = 2? Describe el método para sumar en el sistema binario y pon al menos cinco ejemplos de sumas de números expresados en sistema binario.

Esta pregunta la contestaron correctamente todos los grupos y presentaron distintos ejemplos para poner de manifiesto ese hecho.



Ejercicio 10. En el libro de lectura *Ernesto el aprendiz de matemago* de José Muñoz Santonja, en su capítulo 14 titulado «Un descubrimiento increíble», incluye un juego de seis tarjetas, que le permite al mago adivinar el número que ha pensado Ernesto, con tan solo la información de en qué tarjetas aparece dicho número. Describe en qué se basa dicho juego y cómo se construyen las tarjetas y aplícalo para el caso de tres, cuatro, cinco y siete tarjetas.

Tarjeta 1							
1	3	5	7	9	1_1	1_2	1_5
1_7	1_9	2_1	2_3	2_5	2_7	2_9	3_1
3_3	3_5	3_7	3_9	4_1	4_3	4_5	4_7
4_9	5_1	5_3	5_5	5_7	5_9	6_1	6_3

Tarjeta 2							
2	3	6	7	1_0	1_1	1_4	1_5
1_8	1_9	2_2	2_3	2_6	2_7	3_0	3_1
3_3	3_5	3_8	3_9	4_2	4_3	4_6	4_7
5_0	5_1	5_4	5_5	5_8	5_9	6_2	6_3

Tarjeta 3							
4	5	6	7	1_2	1_3	1_4	1_5
2_0	2_1	2_2	2_3	2_8	2_9	3_0	3_1
3_6	3_7	3_8	3_9	4_4	4_5	4_6	4_7
5_2	5_3	5_4	5_5	6_0	6_1	6_2	6_3

Tarjeta 4							
8	9	1_0	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5
2_4	2_5	2_6	2_7	2_8	2_9	3_0	3_1
4_0	4_1	4_2	4_3	4_4	4_5	4_6	4_7
5_6	5_7	5_8	5_9	6_0	6_1	6_2	6_3

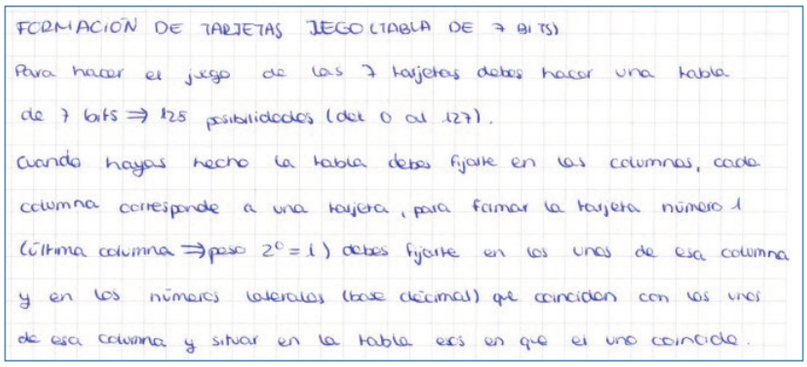
Tarjeta 5							
1_6	1_7	1_8	1_9	2_0	2_1	2_2	2_3
2_4	2_5	2_6	2_7	2_8	2_9	3_0	3_1
4_8	4_9	5_0	5_1	5_2	5_3	5_4	5_5
5_6	5_7	5_8	5_9	6_0	6_1	6_2	6_3

Tarjeta 6							
3_2	3_3	3_4	3_5	3_6	3_7	3_8	3_9
4_0	4_1	4_2	4_3	4_4	4_5	4_6	4_7
4_8	4_9	5_0	5_1	5_2	5_3	5_4	5_5
5_6	5_7	5_8	5_9	6_0	6_1	6_2	6_3

Previamente a que el alumnado tratase de responder a este ejercicio, en clase se realizó la lectura del capítulo citado y se abordaron las diferentes dudas que tuvieron los alumnos, que en concreto fue la explicación del truco de las tarjetas.

Aun así, los alumnos tuvieron dificultades para expresar en lenguaje matemático y por escrito en qué se basa el truco del juego de las tarjetas y de poner en práctica entre ellos dicho truco. Para ello uno de los alumnos debía asumir el papel de Ernesto y otro el papel del mago. Donde no tuvieron dificultad es en la realización de las tarjetas ya que consistía en el manejo de las tablas de paso de decimal a binario.

Explicación de la realización de las tarjetas:

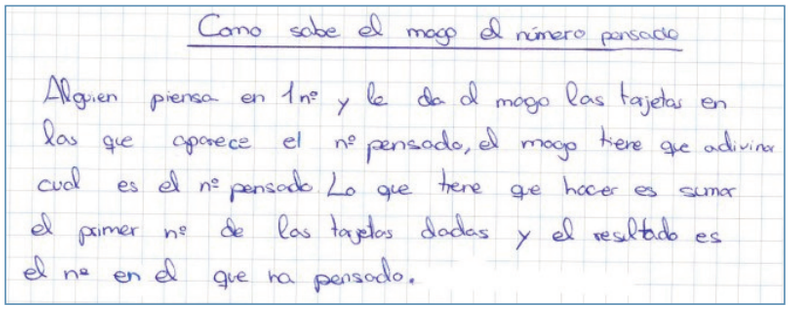


FORMACIÓN DE TARJETAS JUEGO (TABLA DE 7 BITS)

Para hacer el juego de las 7 tarjetas debes hacer una tabla de 7 bits ⇒ 128 posibilidades (del 0 al 127).

Cuando hayas hecho la tabla debes fijarte en las columnas, cada columna corresponde a una tarjeta, para formar la tarjeta número 1 (última columna ⇒ peso $2^0 = 1$) debes fijarte en los unos de esa columna y en los números laterales (base decimal) que coincidan con los unos de esa columna y sumar en la tabla ecs en que el uno coincide.

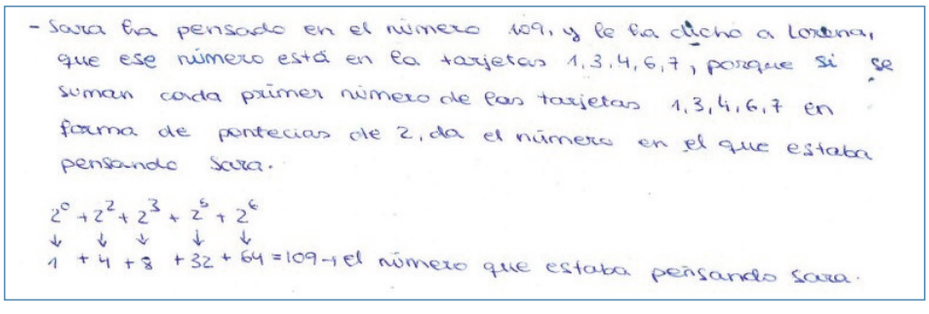
Explicación del truco:



Como sabe el mago el número pensado

Alguien piensa en 1nº y le da al mago las tajetas en las que aparece el nº pensado, el mago tiene que adivinar cual es el nº pensado. Lo que tiene que hacer es sumar el primer nº de las tajetas dadas y el resultado es el nº en el que ha pensado.

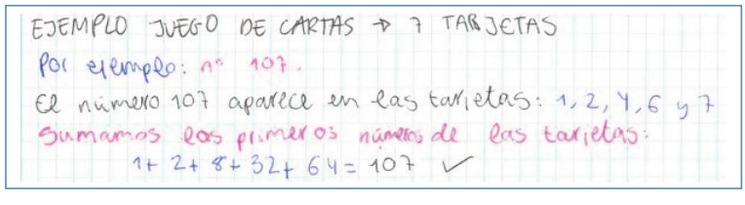
Ejemplos de aplicación del truco:



- Sara ha pensado en el número 109, y le ha dicho a Lorena, que ese número está en la tarjetas 1, 3, 4, 6, 7, porque si se suman cada primer número de las tarjetas 1, 3, 4, 6, 7 en forma de potencias de 2, da el número en el que estaba pensando Sara.

$2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6$

$1 + 4 + 8 + 32 + 64 = 109$ → el número que estaba pensando Sara.



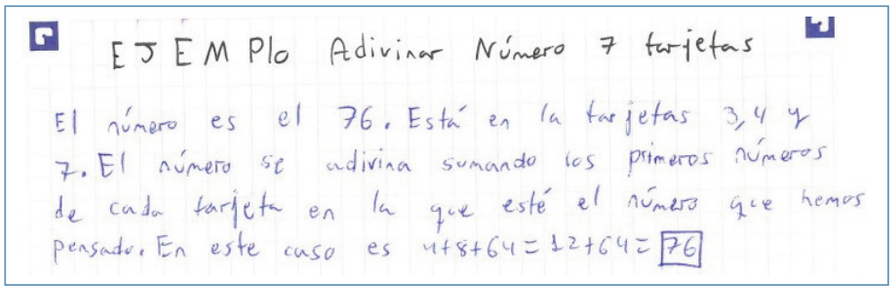
EJEMPLO JUEGO DE CARTAS → 7 TARJETAS

Por ejemplo: nº 107.

El número 107 aparece en las tarjetas: 1, 2, 4, 6 y 7

Sumamos los primeros números de las tarjetas:

1 + 2 + 8 + 32 + 64 = 107 ✓



EJEMPLO Adivinar Número 7 tarjetas

El número es el 76. Está en la tarjetas 3, 4 y 7. El número se adivina sumando los primeros números de cada tarjeta en la que esté el número que hemos pensado. En este caso es 4 + 8 + 64 = 12 + 64 = 76

Juego de siete tarjetas:

Conclusiones

Aunque los ejercicios propuestos en este trabajo en equipo eran de repaso, a los alumnos les cuesta en primer lugar entender lo que les preguntan en cada ejercicio, por otro lado, también presentan dificultades en verbalizar la argumentación de resolución de los mismos entre ellos y aún más, en la expresión escrita. Por lo que hay que trabajar con ellos la lectura de textos científicos, en concreto, matemáticos, para ayudarles a desarrollar la comprensión lectora y también a escribir textos en un lenguaje matemático preciso, ya que no están acostumbrados a argumentar y a indicar todos los pasos en la resolución de ejercicios y problemas en la asignatura.

Por tanto, debemos incidir concretamente en el objetivo número 1 del currículo de primer y segundo curso de las Matemáticas de la ESO, es decir, «utilizar correctamente el lenguaje matemático con el fin de comunicarse de manera clara, concisa, precisa y rigurosa» y en el número 9, «desarrollar técnicas y métodos relacionados con los hábitos de trabajo, con la curiosidad y el interés para investigar y resolver problemas y con la responsabilidad y colaboración en el trabajo en equipo».

Referencias bibliográficas

MUÑOZ, J. (2003), *Ernesto el aprendiz de matemago,* Nivola, Madrid.
Talleres de Conexión Matemática impartidos por el autor del presente artículo.

Cole.ggbb #15

Series... pero no serias

por

Ana Isabel Blasco Nuño, Carmen Soguero Pamplona y Ricardo Alonso Liarte

(CEIP Ricardo Mallén, Calamocha; Universidad de Zaragoza, Teruel;

IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

El razonamiento lógico es necesario para la construcción de los conocimientos de diversas áreas del currículo, pero especialmente, de los conocimientos matemáticos.

Con este artículo pretendemos mostrar actividades para desarrollar en la pizarra digital interactiva, realizadas con GeoGebra, que promuevan en los niños el razonamiento lógico. Estas aplicaciones formarían parte de situaciones de enseñanza basadas en el reconocimiento de cualidades sensoriales de los objetos del entorno cotidiano de los niños, que son las situaciones que van a permitir la construcción del conocimiento señalado.

No es la primera vez que tratamos el razonamiento lógico en esta sección. En esta ocasión, nos centraremos en actividades de seriación. Al contrario que las actividades de decantación y clasificación, las seriaciones deberán consolidar en los niños la capacidad de comparar objetos y de colocarlos en función de sus diferencias (Chamorro, 2005).

En la edad correspondiente a Educación Infantil, sobre todo a partir de los 2 años, los niños cuentan con un pensamiento más intuitivo que lógico, y es a lo largo de esta etapa cuando, progresivamente, la lógica irá ganando terreno a la intuición en sus razonamientos. En este proceso, la construcción de series puede aportar avances significativos, dada la flexibilidad que ofrece a la hora de definir variables como la dificultad, el tipo de cualidades que intervienen (cualitativas y/o cuantitativas), o el número de elementos distintos que constituyen el patrón básico. Por otra parte, son un punto de partida para la enumeración de colecciones y la introducción del número.

Las actividades que proponemos en este artículo están basadas en el trabajo con dos cualidades cualitativas (color y forma) y una cuantitativa (tamaño). La dificultad de la serie se puede incrementar aumentando el número de elementos distintos en el patrón base que deberán ser repetidos. Esto implica un esfuerzo extra, memorístico y de atención, en el alumno que resuelve la serie. Pero otra forma de aumentar progresivamente la dificultad de la actividad es combinar varias cualidades dentro de una misma serie. Por ejemplo «rojo y grande–azul y pequeño––rojo y grande– ···».

Conviene tener en cuenta que el tipo de actividad que se desarrolla con estas aplicaciones depende de los objetivos didácticos que se plantee el docente. Por ejemplo, cualquiera de estas herramientas se puede usar para que, una vez entrenados los alumnos en la construcción de series por repetición del patrón, el docente pase a mostrar una serie completa y pida que el alumnado verbalice el criterio con que se ha montado.

Por otra parte, en el trabajo con las series siempre intervienen elementos temporales: toda serie se construye en una secuencia temporal, colocando un elemento «antes» y otro «después», lo cual nos da pie a aprovechar estas actividades para introducir el vocabulario asociado a esta magnitud, aunque no sea el objetivo específico que estemos trabajando. Lo mismo ocurre con los conceptos espaciales: cada elemento está colocado «delante» o «detrás» de otro. Y se hace evidente la necesidad de establecer una referencia (el inicio de la serie) para poder aplicar estos términos, ya que sin ella será imposible la comunicación necesaria para la realización conjunta de las actividades.

Así mismo, las series nos permiten la introducción de términos relativos al proceso de medida, ya que podemos centrar el criterio de construcción teniendo en cuenta las relaciones comparativas cuantificadas con términos como «mayor que» y «menor que», dando paso así a actividades de ordenación.

Como vemos, la utilización de series constituye un elemento importante en el desarrollo de los conocimientos matemáticos básicos en esta etapa. A continuación proponemos una pequeña colección de las actividades disponibles en MatemaTICinfantil, reunidas en el libro de GeoGebra «Series» .

Coloca las plumas

Se trata de una actividad muy básica sobre series, en la que solo aparece colocada una pluma de color sobre la cabeza de un niño y hay que rellenar toda la cinta con otras plumas. Esto da pie a establecer el comienzo de series de dos o tres elementos, pues solo se pueden colocar siete plumas. La sencillez de la aplicación invita a su utilización en gran grupo, fomentando la verbalización de instrucciones por parte de un grupo para que otro la construya.

Otra manera de plantear una actividad con este material sería jugar con la simetría en la disposición de las plumas del penacho.

Decora la canoa

Siguiendo con la temática de los indios americanos, proponemos *Decora la canoa*. Esta escena propone una de estas embarcaciones, en cuyo lateral hay una línea quebrada que delimita dos zonas. Sobre ellas se pueden ir colocando las figuras geométricas (triángulos y círculos) que aparecen en la actividad. Hay que tener en cuenta que solo hay uno de cada color y por tanto el criterio del color no va a servir para realizar las series.

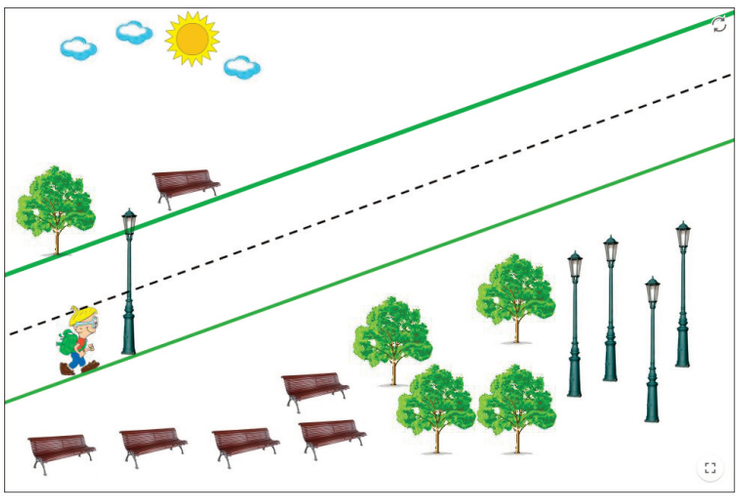
Los planteamientos de trabajo con esta actividad pueden ser muy variados. Por ejemplo, podemos proponer sencillamente la construcción de una serie descrita por el docente a partir de las formas geométricas que decorarán la canoa. O también pueden ser los niños quienes, libremente, coloquen las figuras, a condición de que posteriormente verbalicen los criterios seguidos.

También podemos basar el patrón de la serie en el uso de vocabulario espacial, a través de consignas del tipo «los triángulos encima de la línea y círculos debajo».

Otra manera de trabajar consistiría en que cada niño describa oralmente al siguiente la pieza que debe colocar y en qué posición. Posteriormente, el niño que la ha colocado será el que dé las instrucciones al siguiente.

Yendo un paso más allá en la dificultad, se podría añadir a las instrucciones una restricción de colores o formas, al estilo de «no se pueden colocar círculos rojos».

Series en el parque

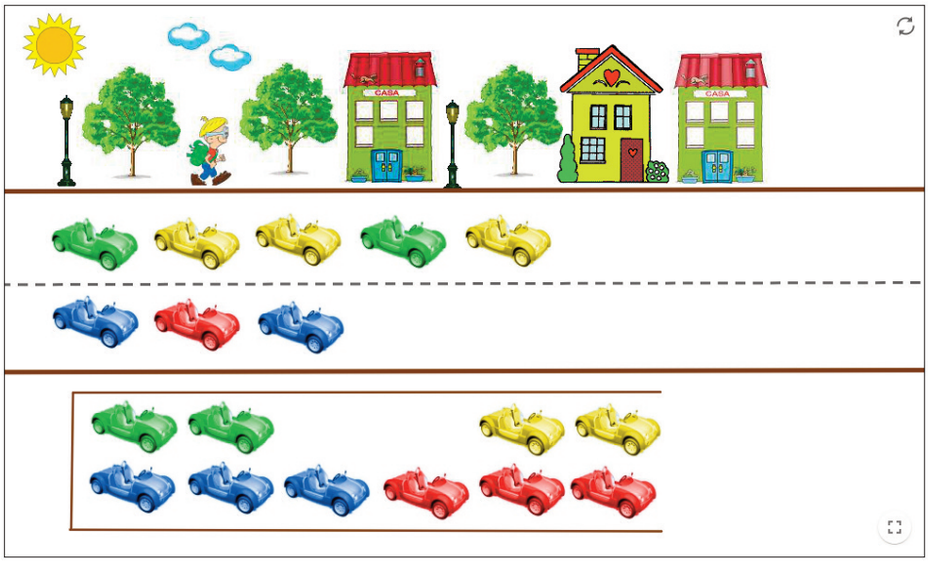


Los elementos que podemos encontrarnos en un parque, farolas, bancos o árboles, también se pueden utilizar para crear series. Son objetos familiares para los niños, pertenecientes a su entorno próximo. Este applet solo muestra un escenario con los elementos disponibles para el uso que se considere. Es decir, todos se pueden desplazar a lo largo de la pantalla, lo que permite iniciar una serie por parte del docente y que sean los alumnos quienes la continúen o sean los alumnos quienes la inicien, colocando los elementos tanto en un lado como en otro de la calle.

Una actividad interesante, por la verbalización que implica, sería que unos alumnos les indicaran oralmente a otros el criterio para construir la serie.

Series de coches

De manera similar a la actividad del parque, se dispone en este caso de varios coches de colores que se pueden situar en los dos carriles de una calzada, permitiendo así proponer al alumnado dos series al mismo tiempo. Estas actividades se pueden convertir en un juego incorporando un elemento de azar, como puede ser la elección del color por medio de fichas del parchís metidas en una bolsa, o un dado que disponga en sus caras de esos colores. Se podrá avanzar en una de las series si al elegir la ficha o tirar el dado se consigue el color que toca en la serie. Todos los coches se pueden mover por lo que también es posible plantear modelos para continuar las series tanto por parte del docente como del alumnado.

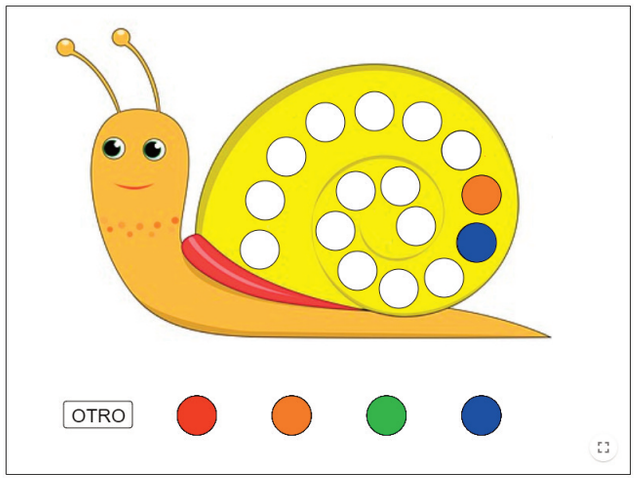


Después de jugar un poco «a los indios» y de pasar un rato por el parque, vamos ahora a desarrollar actividades en las que los protagonistas son los animales, elementos motivadores como pocos.

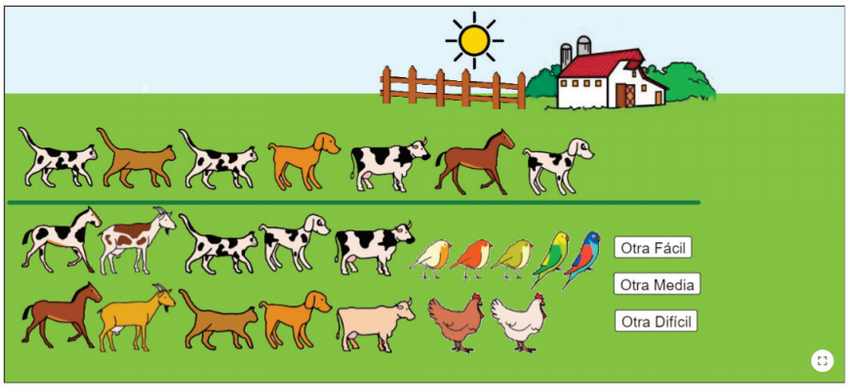
Caracol en serie

Sobre la concha de un caracol hay que continuar una serie de color. Los círculos de color que se encuentran en la parte inferior pueden arrastrarse hasta depositarlos sobre el círculo blanco que se quiera rellenar de color.

En esta actividad jugamos con dos características que le pueden aportar atractivo. Por un lado, los elementos de la serie están colocados a lo largo de la espiral que dibuja la concha de un caracol, apartándonos un poco de la linealidad que se mantiene en otras actividades de este artículo. Por otra parte, se muestran tres elementos de la serie (se pueden repetir colores) que aparecen en tres posiciones distintas cuando se reinicia el *applet* con el botón OTRO. Los tres elementos de la serie pueden aparecer al principio o al final de la misma, lo que solo deja una dirección para continuarla, o en la zona central con lo que deben de seguir rellenando de color los círculos en las dos direcciones. Esto puede dar pie al trabajo con términos de posiciones relativas como «delante de» y «detrás de». Si se quiere se puede contar tam-



bién como elemento inicial de la serie el primer círculo blanco que aparece junto a los de color, aumentando así las posibilidades de interactuar con la propuesta.



Series de animales

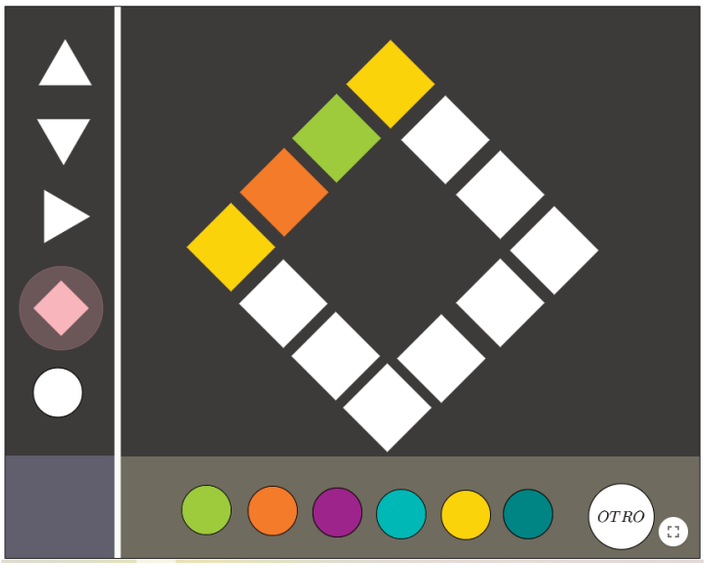
En esta actividad el escenario muestra el entorno de una granja al aire libre. Con ello pretendemos emplear elementos del entorno próximo reconocibles y motivadores, apropiados para los más pequeños. En la parte de abajo hay ocho tipos de animales diferentes. Sus formas, lógicamente, son distintas. Pero además, cada clase de animal aparece con coloreado en dos tonos (marrón y blanco con manchas por ejemplo) o en tres tonos (en el caso de los pajaritos). Tenemos pues la posibilidad de crear series jugando con dos características cualitativas distintas: la forma (cada tipo de animal tiene una fácilmente reconocible), con ocho posibilidades, y el color con dos o tres posibilidades.

La actividad propone el inicio de la serie, de modo que el alumnado debe observarla y deducir el patrón. Aparecen tres botones para regular la dificultad de las propuestas. En las más fáciles, el patrón incluye solamente una de las dos características, sin que aparezcan elementos con la otra propiedad diferente. Por ejemplo, si aparece la serie «gato – gallina – gato – gallina» los gatos son todos iguales y las gallinas también, para que los niños se centren en el tipo de animal y no en su color. Además solo aparece un elemento seguido del mismo tipo. En las series de dificultad intermedia, aunque nos seguimos centrando en una propiedad, puede aparecer más de un elemento de cada tipo. Y en las más difíciles se combinan las dos características de los elementos en un mismo patrón, lo que hace más complicado descubrir la pauta.

Después de haber propuesto *applets* basados en motivos cotidianos, subimos un peldaño más en la escalera de la dificultad y proponemos actividades con series a partir de elementos geométricos no vinculados a ningún contexto próximo. La abstracción de la situación dificulta la resolución.

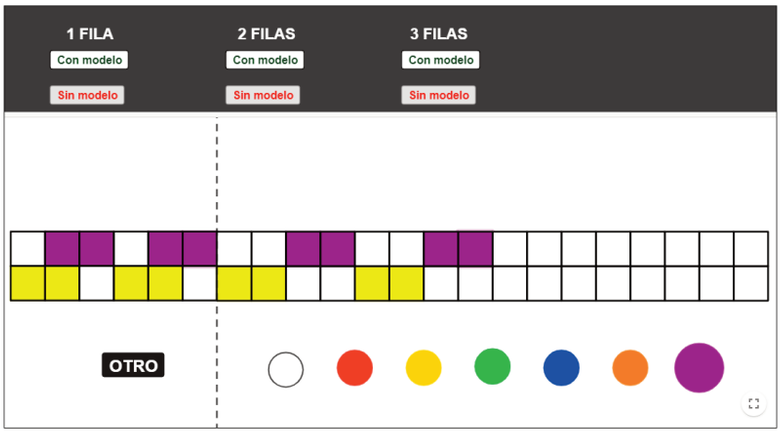
Figuras en serie

En este *applet* se va a trabajar con una única la cualidad: el color. Sin embargo, además de la abstracción, hay otro aspecto que aumenta la dificultad: la serie se monta sobre una figura cerrada, lo que impide que se vea claramente el «principio», el primer elemento.



Se presentan, a la izquierda de la escena, una serie de figuras geométricas cerradas (triángulos, cuadrados y círculos) cuyo contorno está formado por el mismo tipo de figuras. La actividad permite seleccionar, entre las figuras de la izquierda, con cuál se quiere trabajar. Una vez elegida, se trata de continuar la serie a partir de los elementos coloreados que sirven como punto de partida. En el caso de los triángulos y el cuadrado, se muestra como patrón uno de los lados del perímetro y hay que completar los otros. En el caso del círculo los puntos coloreados aparecerán en distintas posiciones cuando se reinicie la actividad con el botón OTRO. En

esta ocasión si se quiere utilizar el blanco como un color más del patrón habrá que hacerlo antes y después de los tres colores para que el patrón sea de 5 elementos y así pueda cerrarse el círculo (en total hay 15 elementos en la serie).



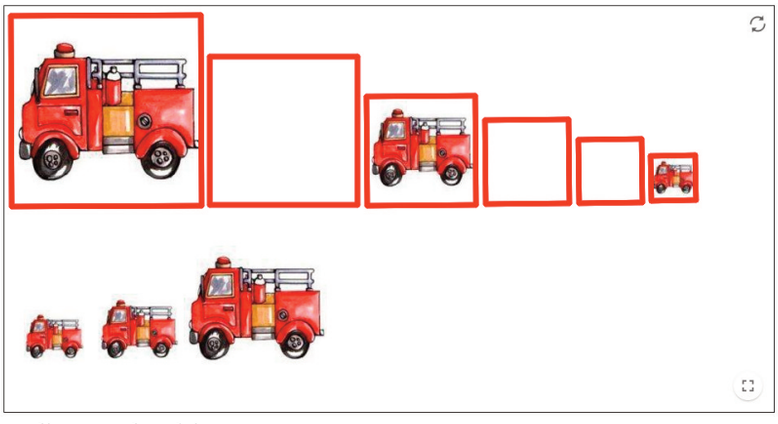
Series de varias dimensiones

Esta actividad, que tampoco propone una contextualización de la escena, ofrece varias alternativas para la realización de series. En primer lugar se puede elegir el número de filas que van a formar la series, entre una y tres, en las que se utilizará uno, dos o tres colores. Una línea discontinua vertical separa el patrón de la parte que debe completar el alumnado al realizar la actividad. Los colores se seleccionan en la parte inferior con un clic y al volver a hacer clic sobre cualquier cuadro de la rejilla, este se rellena de ese color. Se ha añadido el blanco para que sirva de corrector. Además, cuando se elija un color, el círculo que lo contiene aumentará de tamaño, lo que permitirá saber en cada momento cuál es el color seleccionado.

Además de la posibilidad de plantear la actividad con rejillas de 1, 2 o 3 filas, también se puede elegir que haya un modelo o patrón para continuar, o por el contrario, que no se disponga de él y sean los propios niños quienes planteen el modelo a continuar como serie, lo que añade mayores posibilidades a la propuesta que se hace con esta actividad.

La utilización de un dado de colores, junto con una rejilla sin modelo, permite jugar con el azar en la construcción de la serie, bien en su conjunto o en el establecimiento del patrón a seguir.

Ordena los camiones



Hemos dejado para el final esta actividad en la que la propiedad en la que se basa la construcción de la serie no es cualitativa como hasta ahora, sino cuantitativa: el tamaño. Esto nos lleva a traspasar la línea que separa series y ordenaciones: una ordenación no es más que una serie en la que cada elemento tiene más (o menos) cantidad de una cierta magnitud que el anterior. Así, podemos introducir al alumnado en el campo de la medida a través de esta situación de comparación directa de objetos.

El *applet* muestra un total de seis camiones de bomberos de distintos tamaños, aunque de idéntica forma para evitar las distracciones con otras propiedades como forma o color. Como ayuda aparecen otros tantos marcos de distintos tamaños en los que debemos colocar los camiones arrastrándolos. Estos permiten centrar la actividad en la magnitud área.

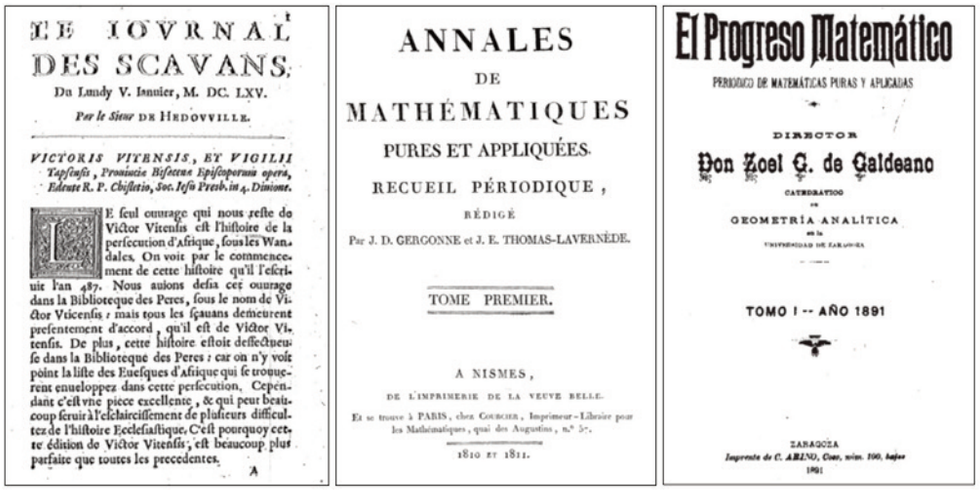
Actividades como las de esta pequeña colección, basadas en series, tienen poco de «serias» para los alumnos. Abordadas como juegos, ayudan a los niños a avanzar en la transición del pensamiento intuitivo al pensamiento lógico. Y por lo tanto, a preparar la base sobre la que se apoyará el edificio de los conocimientos matemáticos en el futuro.

Referencias bibliográficas

Dos problemas propuestos y olvidados

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

La Zaragoza de finales del siglo XIX tuvo la fortuna de ser el lugar de publicación de la primera revista española dedicada íntegramente a las matemáticas. En 1891, apenas 80 años después del segundo sitio, vio la luz *El Progreso Matemático*. Este «periódico de matemáticas puras y aplicadas», como se denominaba en su portada, fue fundado e impulsado de forma casi heroica por Zoel García de Galdeano.


LE IOVRNAL DES SCAVANS.
Du Lundy V. Ianuier, M. DC. LXV.
Par le Sieur DE HEDOVVILLE.
VICTORIS VITENSIS, ET VIGILII Tapsensis, Provinciæ Byzacenæ Episcoporum opera, Edente R. P. Chifletio, Soc. Iesu Presb. in 4. Divione.
LE seul ouvrage qui nous reste de Victor Vitensis est l'histoire de la persecution d'Afrique, sous les Vandales. On voit par le commencement de cette histoire qu'il l'écrivit l'an 487. Nous auions desia cet ouvrage dans la Bibliotheque des Peres, sous le nom de Victor Vticensis : mais tous les sçauans demeurent presentement d'accord, qu'il est de Victor Vitensis. De plus, cette histoire estoit deffectueuse dans la Bibliotheque des Peres : car on n'y voit point la liste des Euesques d'Afrique qui se trouuerent enueloppez dans cette persecution. Cependant c'est vne piece excellente, & qui peut beaucoup seruir à l'eclaircissement de plusieurs difficultez de l'histoire Ecclesiastique. C'est pourquoy cette édition de Victor Vitensis, est beaucoup plus parfaite que toutes les precedentes.
A

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.
RECUEIL PÉRIODIQUE,
RÉDIGÉ
Par J. D. GERGONNE et J. E. THOMAS-LAVERNÈDE.
TOME PREMIER.
A NISMES,
DE L'IMPRIMERIE DE LA VEUVE BELLE.
Et se trouve à PARIS, chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.
1810 ET 1811.

El Progreso Matemático
PERIODICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS
DIRECTOR
Don Zoel G. de Galdeano
CATEDRATICO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA
TOMO I -- AÑO 1891
ZARAGOZA
1891

A pesar de que las publicaciones periódicas dedicadas a aspectos científicos surgieron a mediados del siglo XVII (el *Journal des Savants* se comenzó a publicar en enero de 1665), las revistas de contenido exclusivamente matemático tardaron algo más en aparecer. La primera de ellas fue la francesa *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* que se fundó en 1810.

Estas revistas jugaron un importante papel en la creación de una cierta «conciencia de clase» dentro de la comunidad de los matemáticos. Muchas de ellas surgieron a partir de sociedades científicas o promovieron su creación. En España, por ejemplo, la Sociedad Matemática Española (la actual RSME) fue fundada en 1911 siendo el propio García de Galdeano su segundo presidente.

Además, la existencia de publicaciones en multitud de países promovió los intercambios de las mismas, tanto entre instituciones como entre particulares. De esta forma se facilitaba la diseminación de los descubrimientos y se contribuyó decisivamente a un proceso de internacionalización que en la actualidad, gracias a los avances tecnológicos, damos prácticamente por hecho. No es casualidad que el primer Congreso Internacional de Matemáticos que se llevó a cabo de forma oficial tuviera lugar en 1897. Por cierto, que García de Galdeano fue el único español en intervenir en dicho congreso con una ponencia titulada *L'unification des concepts dans les mathématiques*.

Todas las revistas matemáticas que surgieron a finales del siglo XIX tenían secciones más o menos similares. Así, encontramos artículos de investigación, notas biográficas, recensiones de libros y de otras revistas, anuncios, etc. También era casi constante la presencia de una sección de problemas propuestos en la que lectores y colaboradores de la revista enviaban enunciados de problemas y sus soluciones.

Estas secciones de problemas tuvieron una importancia mayor de la que en principio pudiera parecer. En publicaciones que pretendían fomentar un interés hacia las matemáticas, promover la actividad de los lectores resultaba fundamental. Así lo veía García de Galdeano, quien al introducir la sección en el octavo número de *El Progreso Matemático* decía:

> Es de suma importancia no descuidar otros puntos de vista. Uno de estos es el que originan las cuestiones por resolver, que generalmente forma una sección en las publicaciones periódicas, como aliciente que ponga en juego la actividad de los lectores, aumentando así el interés hacia las investigaciones matemáticas, por efecto de su intervención inmediata en este trabajo.

No obstante, por más que su objetivo inicial fuera el de mover a la acción a los lectores de la revista, lo cierto es que estas secciones de problemas supusieron en muchos casos el vehículo a través del que se producían colaboraciones e intercambios entre matemáticos.

En la tabla siguiente, por ejemplo, se muestran los proponentes de problemas más activos a lo largo del periodo de existencia de *El Progreso Matemático* (1891-1895 y 1899-1900).

Nombre	*País de nacimiento*	*Número de problemas propuestos*
Henri Van Aubel	Bélgica	74
Henri Brocard	Francia	42
Joseph Neuberg	Luxemburgo	40
Émile Lemoine	Francia	35
Joseph Gillet	Bélgica	23
Virginio Retali	Italia	20
Juan Jacobo Durán Loriga	España	20

En el caso de los resolutores de problemas, se mantiene el marcado carácter internacional, aunque como se puede ver no siempre se trata de los mismos nombres.

Nombre	*País de nacimiento*	*Número de problemas resueltos*
Basile Sollertinsky	Rusia	81
Henri Brocard	Francia	55
Virginio Retali	Italia	52
Alfredo Schiappa Monteiro	Portugal	33
Arnold Droz-Farny	Suiza	21
Cecilio Jiménez Rueda	España	16

Llama poderosamente la atención que, a finales del siglo XIX, una humilde revista publicada en una pequeña capital de provincia española lograra atraer el interés y la participación de matemáticos de todo el continente. Este hecho posiblemente ilustre la existencia en ese momento histórico de una cierta «demanda» de este tipo de publicaciones; lo que quizás también explica en parte su aparición y su popularización entre finales del siglo XIX e inicios del siglo XX.

Otro aspecto interesante que nos permite apreciar la sección de problemas está relacionado con las matemáticas que estaban «de moda» durante la época. En la tabla siguiente vemos un recuento por temas de todos los problemas propuestos en *El Progreso Matemático*.

Tema	*Número de problemas*
Geometría	308
Teoría de números y combinatoria	22
Álgebra	10
Análisis matemático	6
Ecuaciones diferenciales	3
Problemas «reales»	2

Aunque se podría refinar la clasificación de los problemas de geometría, el desequilibrio es evidente. Sin entrar en detalles, también es reseñable la diferencia existente entre este reparto de temas y la investigación matemática que se estaba llevando a cabo en la época. Es decir, se aprecia una distancia entre los temas del gusto de los resolutores de problemas y la investigación llevada a cabo por matemáticos profesionales.

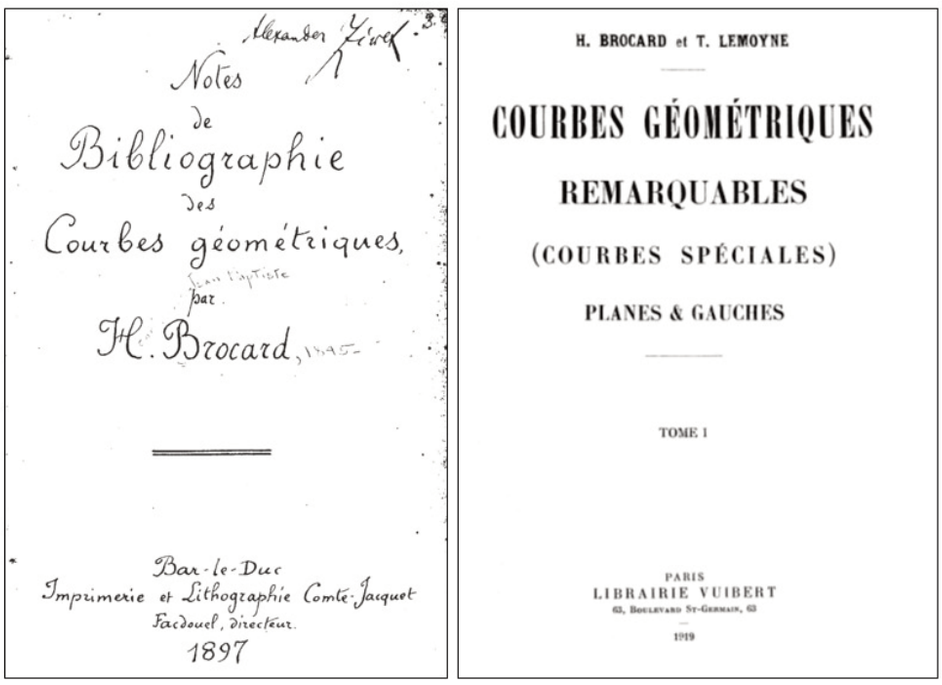
Algunos de estos problemas quedaron sin resolver. En concreto, de los 351 problemas aparecidos en la revista, 99 (un 28,2 %) no recibieron nunca respuesta. Curiosamente, y pese a su reparto desigual, la proporción de problemas no resueltos fue muy similar entre los problemas de geometría (86 de 308, un 27,9%) y los no geométricos (13 de 43, un 30,2%). Esto sugiere que la atención recibida por ambos tipos de problemas era, pese a todo, similar.

El problema no resuelto más antiguo apareció en el número 9 de la revista, publicado en septiembre de 1891 y fue propuesto por el francés Henri Brocard.

> 9. Se dá una circunferencia, referida á dos ejes rectangulares OX, OY y un punto A sobre OX. Desde el punto A se trazan secantes ABC, después se construyen en los puntos de intersección B, C, y se proyecta sobre estas tangentes el punto de intersección D, de ABC con OY. Hallar el lugar de los puntos M así obtenidos.
>
> Indicar todas las formas de la curva.
>
> *(H. Brocard).*

Se observa rápidamente que hay una pequeña errata en el enunciado, pues debería decir «… se construyen las tangentes en los puntos de intersección B, C…» pero esto se deduce claramente del resto del texto.

Los problemas propuestos que aparecen en la sección nos proporcionan a veces información sobre los gustos personales o sobre los temas en los que trabajaban los proponentes. De esta forma no es casualidad que Brocard, muy aficionado a la geometría, propusiera un problema sobre una curva plana surgida de manera mecánica como un lugar geométrico. De hecho, tal y como vemos en la figura, se trata de un tema que le interesó lo suficiente como para abordar recopilaciones de bibliografía sobre el mismo.


Notes
de
Bibliographie
des
Courbes géométriques,
par
H. Brocard, 1845-

Bar-le-Duc
Imprimerie et Lithographie Comte-Jacquet
Facdouel, directeur.
1897

H. BROCARD et T. LEMOYNE

COURBES GÉOMÉTRIQUES
REMARQUABLES
(COURBES SPÉCIALES)
PLANES & GAUCHES

TOME I

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
63, Boulevard St-Germain, 63
1919

Quizás 130 años después, con la ayuda de GeoGebra por ejemplo, sea un buen momento para que algún lector aficionado a la geometría, resuelva este problema.

Como hemos visto antes, tan solo dos problemas del total de 351 se presentaron en un contexto real (o al menos realista). Desafortunadamente ambos quedaron sin resolver. El primero de ellos fue propuesto en 1894 por el belga Joseph Gillet.

> **159.** Dos vasos A y A′ cuyas capacidades respectivas son V y V′ contienen: el primero una mezcla de a litros de vino y de b litros de agua; el segundo una mezcla de a' litros de vino y de b' litros de agua. Se trasvasa de A′ al A una cantidad de líquido suficiente para llenar este último; luego se llena A′ por medio de A; y en fin, se llena A por medio de A′. Hallar las fórmulas que expresan entonces las cantidades de vino y de agua contenidas en cada vaso.
>
> (*J. Gillet*).

Teniendo en cuenta que se solicita encontrar unas fórmulas, probablemente se trata de un problema pensado para ser resuelto de forma puramente algebraica. A diferencia del problema anterior, resulta algo más complicado rastrear el posible origen del problema, o el interés que el proponente pudiera tener en el mismo. No existen demasiadas publicaciones conocidas del belga Joseph Gillet y, pese a que enseñó matemáticas durante toda su vida, a partir de 1900 se dedicó intensamente a la entomología.

Al tratarse de un problema algebraico, la mayor o menor complicación de su planteamiento o resolución depende fuertemente de la elección de las incógnitas y, a partir de ello, de cómo se planteen las ecuaciones correspondientes. Por ejemplo, si llamamos x_i e y_i $(i = 1, 2, 3)$ a la cantidad de vino y de agua, respectivamente, que se pasan de un vaso a otro en cada uno de los tres pasos del problema, resulta relativamente sencillo plantear iterativamente un sistema algebraico de seis ecuaciones con seis incógnitas y seis parámetros. Hecho esto, hay que tener en cuenta que lo que se nos pide calcular no es directamente ninguna de las seis incógnitas elegidas. ¿Es posible que una elección diferente lleve a situaciones más sencillas? De nuevo parece que es tiempo ya de que algún lector resuelva este problema.

Podríamos poner más ejemplos de problemas que quedaron relegados al olvido en la sección de *El Progreso Matemático* o en las secciones equivalentes de otras revistas de la época. Las matemáticas se motivan y se orientan fundamentalmente a la resolución de problemas. En cierto modo sería bonito rescatar a estos problemas de un olvido de más de un siglo y resolverlos finalmente, logrando así que cumplan el cometido para el que fueron creados.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Enero de 2022
ISSN: 2386-8821e

CC BY NC SA