Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 53
Octubre de 2023

Otro curso que comienza y la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas sigue trabajando para ofertar actividades, crecer en socios y que las Matemáticas lleguen a todos los rincones y personas de todas las edades.

Hemos dado el pistoletazo de salida con la participación de la SAPM en la Noche Insomne de juegos alternativos que tuvo lugar el 23 de septiembre en el Auditorio de Zaragoza y también con la convocatoria del programa Conexión Matemática del Departamento de Educación que han solicitado más de 70 centros en alguna de sus dos modalidades para este curso escolar.

En el horizonte tenemos las reuniones anuales de socios y la Junta de Gobierno de la FESPM —Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas— en las que se planificará el trabajo que está por venir.

Confiando siempre en vosotros, os animamos a participar y colaborar.

Esther García Giménez
Presidenta de la SAPM

Sumario Interactivo

Finalistas del IV concurso de Microrrelatos Matemáticos
I Jornadas de materiales para el aula de Matemáticas en Secundaria (Gijón – Mayo 2023)
La SAPM en la Noche Insomne de juegos alternativos
No solo PDI (I)
Matemáticas para niñosy matemáticas para niñas
Reptiles
Estrellas tetraédricas. Tejiendo entre vértices y aristas
La tecla rota, creamos una actividad rica. Codocencia
Historias matemáticas para niños con discapacidad intelectual
¿Un Papá Noel?, ¿en marzo?

únete
a la SAPM
click

Finalistas del IV concurso de Microrrelatos Matemáticos

En el anterior número de Entorno Abierto se publicaron los microrrelatos ganadores en las diferentes categorías del IV concurso de Microrrelatos Matemáticos que se celebró el pasado curso. Vamos a presentar ahora los finalistas.

Educación Primaria

¡Libertad para los ceros!

Ariane Martínez Serrano (Zaragoza SchoolHouse)

Érase una vez un país donde los números pares e impares vivían separados en ciudades con altas murallas.

Los ceros eran sus esclavos porque gracias a ellos podían superar sus miedos: los impares tenían miedo de sumarse entre sí, porque todos sus hijos saldrían pares; los pares tenían miedo de sumarse con los impares, porque todos sus hijos se volverían así.

Un día, una niña cero se rebeló y gritó: ¡Pensadlo bien, no nos necesitáis! Si vivís juntos, ni pares ni impares desapareceréis.

Al darse cuenta, liberaron a los ceros, que pudieron viajar y ver mundo.

Cero patatero

Nuria García Aranda (CPI Rosales del Camal)

Érase una vez una niña que no le gustaba nada las matemáticas y que consideraba que el número 0 era inútil y lo despreciaba.

Un día, ayudaba a su madre a hacer un pedido *online* de patatas, porque estaban de oferta en el supermercado. Debía de comprar 10 kilos pero al día siguiente vino un camión para descargar 100 kilos de patatas… ¡¡¡No tenía suficiente espacio en casa para guardarlas ni dinero para pagarlas!!!

Ahí aprendió y empezó a valorar la importancia del número 0.

Educación Secundaria

Castañuelas

Alberto Miana (CPI Espartidero)

Le llamaban Castañuelas, porque siempre chasqueaba la lengua simulando este instrumento, pero causando irritación y molestia en el prójimo. Él decía que le recordaba a un taco de billar rompiendo un conjunto perfecto de esferas, encerradas en un triángulo equilátero. Y justo en una de sus partidas, algo sucedió que arrojó luz sobre su teoría; una teoría que trataba de ordenar el precipitado caos.

Sin embargo, más tarde advirtió que el caos no se podía ordenar; el caos sería siempre muerte y destrucción. Tarde lo supo Castañuelas, cuando saliendo del bar donde jugaba fue pateado por varios criminales callejeros.

Cada persona es una ecuación sin resolver
Mariví Gracia Martínez (Colegio San Gabriel)

Cada ecuación tiene su solución. A veces cuesta más, pero cuando las intentan solucionar las personas correctas el resultado siempre es correcto. Realmente el problema no es el ejercicio sino cómo se plantea y se lleva a cabo, ya que en el intento de resolver el problema puedes equivocarte y hacerlo mal. A veces se lee el ejercicio y resulta difícil pero cuando lo llevas a cabo es fácil, ya que a veces las apariencias engañan.

Bachillerato

La calculadora
Javier Azón (La Salle Gran Vía)

La pérdida del móvil del chico me sacó del cajón en el que estaba olvidada.

Que alegría la mía al sentir la suave presión de sus dedos sobre mis teclas. No sabía si podría responder como antes. Mis fuerzas no eran las mismas. Al final, conseguí dar el resultado.

Entonces, pude oír decir al chico sorprendido «papá, este trasto funciona», a la vez que veía reflejada su sonrisa sobre mi pantalla.

Aproveché para grabar en mi memoria este momento de felicidad, consciente de que pronto volvería al cajón de los recuerdos.

Ad populum
Marcos Carrizo Pérez (IES El Portillo)

«Si hay algo que me han enseñado las matemáticas, es que la suma de números de poco valor puede igualar a números con valores más altos. Las personas funcionamos exactamente igual.

Si nos unimos, el resultado equipara al valor de las personas más ricas. No son conscientes de que la fuerza de todo un grupo, por poco valiosos que puedan parecer sus integrantes, puede ser suficiente para destronarles. El resultado es que múltiples unos, al sumarse, alcanzan al cien.

Es cuestión de matemáticas».

Discurso de Jacob Weiler
Matemático y líder de la sublevación contra el gobierno aristócrata inglés

General

La carrera definitiva
Raquel Villacampa Gutiérrez

La tortuga, cansada de llegar siempre a la meta tras Aquiles, le propone a este el reto definitivo, ese que acallará todos los rumores y paradojas: nunca nadie volverá a decir que ella es la más lenta. Así, al grito de ¡y tres! la tortuga comienza a rodar por la braquistócrona y le dedica una sonrisa al atónito Aquiles.

Los números de la vida
Sara Lapuente Martínez

Tras aproximadamente 280 días nacemos a unos 130 latidos por minuto y vivimos 83 años de media, en los que respiramos y parpadeamos 15 veces por minuto.

Vamos unas 5 veces al año al cine, leemos más de 10 libros, y en los 30 días de vacaciones que tenemos nos gusta ir en un 62 % al extranjero.

Desde los 18 años circulamos en coche a unos 100 Km/h por carreteras autonómicas y nacionales hasta que nuestra fuente de energía, el corazón, llega al temido 0, asistolia y fin.

Relatos cortos

El dilema de Clark Vauss

Marcos Carrizo Pérez

La cúpula del techo se abrió hacia los lados desvelando el cielo nocturno que se encontraba salpicado por estrellas y coronado por la Luna. Desde las instalaciones militares en las que se encontraba, Clark podía contemplar aquel hermoso espectáculo.

— Profesor Vauss —de repente, alguien le llamó.

Al girarse, se encontró cara a cara con el comandante Fienn.

— Señor —contestó Clark con educación para seguir las normas de los rangos.

— ¿Ha hecho ya la última revisión de sus cálculos? —le preguntó.

Este asintió con firmeza.

— Sí, señor. Son correctos.

— Eso espero, profesor. Recuerde que el mínimo fallo significaría una pérdida de millones de euros invertidos en esta operación —Clark tragó saliva—. Además de otros tipos de pérdidas, claro.

— Soy consciente, señor.

El hombre de alto rango le miró fijamente.

—Así me gusta, profesor.

Esbozó una breve sonrisa y se alejó de donde estaba Clark. El profesor, matemático con mucha experiencia, suspiró y, respirando hondo, analizó con delicadeza el misil que se encontraba en el centro de la sala. El proyectil, preparado ya en su base de lanzamiento, tenía un gran tamaño e impresionaba el hecho de que su piel metálica escondiera dentro un corazón dispuesto a destruir. Era majestuoso, sin duda, pero su destino era devastador.

— Que empiece el lanzamiento —la orden del comandante no se hizo esperar.

Clark observó cómo el militar estaba cerca de las mesas de control en la que varios trabajadores ya tecleaban. Estaban poniendo en marcha la misión. El misil apuntaba al cielo, dispuesto a surcarlo saliendo con grandeza de la zona en la que se encontraban todos los involucrados en aquel proyecto.

Tras unos segundos de preparación, los propulsores se activaron.

— Cuando usted quiera —se escuchó que un trabajador le decía al comandante.

Este solo tenía que apretar un botón para disparar el arma. Clark, lejos del misil por seguridad, observó cómo el hombre no tardó ni un segundo en darle.

Lo siguiente que el matemático vio, fue cómo el proyectil salía disparado con fuerza. Se iba alejando poco a poco. Parecía que se perdía entre las estrellas que iluminaban el cielo.

— Lanzamiento completado —el aviso fue instantáneo.

— Si el misil llega a su objetivo —el comandante miró a Clark ya que esta parte del plan estaba a su cargo por sus cálculos—, habremos ganado la guerra. Nuestros enemigos no podrán hacer nada contra el ángel de batalla que les hemos enviado —todos le escuchaban atentamente y casi parecían asentir ante sus palabras—. Espero que seáis conscientes de lo que acabáis de hacer. Habéis ayudado a vuestro país a conseguir la victoria —esto último debería alegrar a Clark, pero había algo en él que se lo impedía.

El discurso acabó con una sonrisa por parte del orador. Clark cerró su puño con fuerza. Sabía perfectamente qué se lo impedía. Dejó que sus párpados cayeran con lentitud hasta que su visión se volvió oscura. No quería ver más el misil surcando el cielo. No podía.

— Ya no hay marcha atrás —susurró casi para sus adentros.

No pudo evitar que una lágrima recorriera su mejilla con suavidad como un pequeño riachuelo. Esta representaba lo que sentía en su interior.

— Ya está hecho —se dijo.

***

— Por favor, demos un gran aplauso al matemático que, con sus cálculos, ha hecho que ganemos la guerra —la voz que dirige el evento le nombra con fuerza—. ¡Clark Vauss!

El recién nombrado respira hondo. Finge una sonrisa y sale al escenario por detrás del telón. La gente está reunida en la plaza mirando lo que ocurre en el escenario, que está a más altura. Aplauden.

Clark lo contempla todo sin saber cómo reaccionar. Trata de que su sonrisa no se quiebre para no mostrar sus verdaderos sentimientos.

— Gracias a él, nuestra nación ha conseguido alzarse con la victoria —vítores y gritos se mezclan con los aplausos del público.

Clark, entonces, se da cuenta de que la gente de verdad está contenta por el final de la guerra. Sin embargo, no saben lo que se ha necesitado para acabar con ella.

«¿En qué momento mis cálculos se han manchado de sangre?», piensa Clark.

Todas las miradas se posan en él. Parece que, con ellas, le dan gratitud por lo que ha hecho.

«¿En qué momento los números de mis operaciones se han convertido en vidas humanas?».

El ambiente festivo no cesa. De hecho, se alza con fuerza.

«Al final, el resultado de la ecuación se ha alcanzado, pero, ¿a qué precio?».

La alegría se propaga como un virus que, entre gritos, crece con grandeza.

«Quería acabar con la guerra. Por eso mismo acepté el puesto en la operación. Sin embargo, no era consciente de lo que se necesitaba para que esta finalizara».

— ¡Tiene un arma! —se escucha entre la multitud.

Clark se percata de que, con rapidez, la alegría se convierte en temor. Entre los movimientos de la gente de la plaza, ve a una mujer con una pistola en la mano. Esta le mira con rabia en la lejanía. En el fondo, Clark le entiende. Eso mismo siente él sobre sus actos. Por un momento, desea ser aquella mujer. Desea estar con esa pistola en la mano. Desea poder disparar al Clark que ha cometido tal crimen. Desea poder liberarse de la carga que lleva encima.

Y, entonces, entiende lo que va a ocurrir. Sin embargo, no tiene miedo. Deja que todo ocurra como tiene que ocurrir.

«Espero que, algún día, se me perdone por lo que he hecho. A mí y al monstruo que he creado».

Con estos pensamientos en mente, Clark contempla cómo las muecas de terror de la gente van acompañadas del sonido del disparo. La bala no tarda en ganar velocidad acrecentando la tensión del ambiente. Dispuesta a cumplir su destino, desafía al viento dejándose llevar para poder atravesar la carne de Clark.

«Lo siento».

Y cae desplomado al suelo, dejando que su sangre se mezcle con la de aquellos a los que ha matado. Exhala su último aliento.

Ya es libre.

Un cero a la izquierda

Nuria Asín García

Toda la vida me he sentido muy solo. Soy un cero a la izquierda.

Nací de la mano de un viejo profesor de matemáticas de un pequeño colegio. De esos en los que los niños y niñas son felices.

En clase solo había catorce alumnos, porque esta escuela era de un pueblo pequeño y todos compartían maestro, consejos, aprendizaje y, sobre todo, juegos.

Era un colegio de los muchos que tenemos en Aragón y que se mantienen vivos gracias al tesón de aquellos que dan clase en ellos y de los pequeños ayuntamientos que luchan porque la escuela esté abierta.

El viejo profesor se llamaba Nicolás. Era uno de esos maestros de vocación que ilusionaba con su manera de enseñar.

Un día, abrió su cuaderno de mates, era de esos antiguos, con tapas duras y papel recio, amarillento por sus muchos años. En el mismo tenía problemas, multiplicaciones, divisiones y un sinfín de ejercicios que adaptaba a sus clases. En uno de ellos, me incluyó.

Era un problema clásico, en el que un tendero vendía varias manzanas a una niña y esta las repartía por cestas. El resultado de la división que había que realizar era exacto, y allí me colocó.

Me dibujó estilizado y con trazos bien definidos, pero con mi tradicional «tripota», la que caracteriza a los ceros como yo.

Desde ese momento, comenzó a utilizarme en todas las clases. Era un no parar de movimiento, que se acrecentaba conforme las enseñanzas eran con alumnos más mayores.

Me reía, en ocasiones, porque, según los años que tenía el alumnado, mi presencia les incomodaba. No sabían qué hacer conmigo.

— ¿Dónde pongo este cero? ¿Para qué sirve?…

Había otras veces en que los niños y niñas se enfadaban al verme. Especialmente, cuando aparecía en la primera hoja de los exámenes escrito con un rotulador rojo intenso. Era un simple número, pero solo, tan solo, era muy temido.

Por contrapartida, cuando mi presencia llevaba delante un uno, los pequeños gritaban y reían al conocer el resultado de su esfuerzo.

¡Qué bien se sentían!

Habían trabajado mucho y había merecido la pena. Eso me hacía pensar: «¡Cuánto valor tiene un cero detrás de un número y qué poco si va delante!».

Por todas estas cosas, siempre había sido un número amado y odiado al mismo tiempo. Porque en función de donde aparezco tengo todo el valor del mundo, o ninguno.

Una mañana, mi querido profesor Nicolás acudió a clase, como todos los días, pero, en esa ocasión, los alumnos no llegaron.

Comenzó a recoger sus cosas, y entonces me fijé en que su cara estaba triste.

— Disfruta mucho de tu tiempo libre, le dijo la directora del colegio.

— Muchas gracias, aunque me va a costar acostumbrarme, contestó Nicolás.

Todos los que estábamos en aquel cuaderno comprendimos que algo pasaba.

Nicolás cogió sus cosas, las metió en una caja y, a nosotros, dentro del viejo cuaderno, en su maleta de piel negra.

Tras un rato llegamos a un nuevo lugar. Era un espacio grande, con mucha luz. Incluso nos deslumbró un poco cuando nos sacó del interior de aquella oscura maleta.

Por la ventana se veía un cuidado jardín y, al mirar alrededor, vimos que la estancia estaba llena de mapas, de inventos, una bonita bola del mundo, antigua, como el viejo profesor, y una gran pizarra en la que ponía: «si quieres aprender, suma, resta y multiplícate».

El lema me pareció muy divertido y pensé: «he llegado al sitio correcto».

En esta clase deben de hacer matemáticas, o ciencias; o ser un espacio para experimentos, un laboratorio. «En este sitio seré útil», me dije a mí mismo.

Al igual que yo, todos mis demás compañeros de cuaderno estaban revolucionados.

Los sietes decían que en esa clase habría estudiantes pequeños; los treses decían que no, que serían estudiantes de grado; mis queridos ocho —dos como yo forman uno—, decían que se trataba de un aula de universidad.

Nunca pensamos que el lugar al que habíamos llegado en ese viejo cuaderno tan solo era el lugar de retiro de Nicolás, porque se había jubilado. Era el despacho de su casa.

Y allí nos dejó. Encima de la mesa, en una torreta donde se apilaban varios libros y, desde aquel momento, también el viejo cuaderno que era mi casa.

— ¿Qué voy a hacer ahora?, exclamó para sí mismo. Nadie respondió.

Mientras, todos nosotros sentimos una gran pena, porque pensamos que, desde ese día, ese ir y venir de números por la pizarra, por los cuadernos, por los libros…, dejarían de llenar sumas, restas, divisiones y multiplicaciones. Y, con ello, un cero a la izquierda, como yo, todavía estaría más solo.

Pasaron varios días sin que nadie saliera ni entrara de aquella estancia. El silencio se apoderó de nosotros hasta que oímos un timbre.

— ¡Abuelo!, se oyó la voz de varios niños.

De repente, comenzamos a sentir que en aquella casa había alegría, más gente. La familia de Nicolás había llegado. Pero, pasaban las horas y nadie entraba en aquella habitación.

Pasaron dos días.

A la tercera mañana, la puerta se abrió y aparecieron dos pequeños. Sus ojos eran risueños, de diablillo, diría yo.

Los pequeños comenzaron a observar el sinfín de artilugios que había en aquel cuarto.

— Mira esta bola del mundo Martín —le decía un niño a otro—, mientras la movía señalando un país que desconocía.

— Aquí hay un libro muy raro, Miguel, indicaba Martín señalando a un texto titulado *Tipos de derivadas*.

— ¡El abuelo tiene cosas muy divertidas aquí!, decía Martín.

— Anda, y tiene una pizarra, ¡vamos a escribir en ella!, le replicó Miguel.

Los dos pequeños cogieron tizas y comenzaron a hacer dibujos en una parte de la pizarra, ya que su altura no les permitía acceder a todo el encerado.

A Martín se le ocurrió la idea de subirse a la silla del despacho y encontró en ella un improvisado coche de carreras, que comenzó a girar y girar.

Miguel, que llevaba una taza con agua en la mano, quiso subirse a la mesa del escritorio para llegar mejor a la pizarra, con tan mala suerte que se le cayó. ¿Y sobre qué cayó? Sobre el cuaderno que era nuestra casa.

— ¡El cuaderno del abuelo!, gritaron a la par los dos niños llevándose las manos a la cabeza.

Una marea gigante hizo que todos saliésemos de nuestras páginas, provocando un gran desorden, el que deja un tsunami cuando toca tierra.

La tinta comenzó a desparramarse por todos los sitios y sentimos que era nuestro final.

Los dos niños, atemorizados por lo que acababa de pasar, cogieron rápidamente el cuaderno y comenzaron a moverlo. El tsunami dio paso a un terremoto en el que nos costó agarrarnos.

— El abuelo se va a enfadar, porque es su cuaderno, y parece viejo, debe de tenerlo hace muchos años, decían con cara triste los niños.

Ambos se miraron y pensaron que tenían la solución en su mano.

Corriendo, cogiendo el cuaderno chorreante en sus manos, fueron al cuarto de baño. De un armario sacaron un secador y comenzaron a darle a las hojas.

Pero, en algunas, la tinta había hecho estragos y toda la página aparecía emborronada.

Los niños, al ver el desastre ocasionado, pensaron que la mejor manera para evitar la regañina era hacer desaparecer esa calamidad, ocultando el cuaderno.

Y así lo hicieron.

Bajaron al jardín y, en el arenero en el que solían jugar, hicieron un agujero, metiendo el cuaderno dentro. Lo taparon y dejaron la arena de la superficie como si no se hubiera movido.

El silencio cayó sobre nosotros durante muchos años. En ese momento y sin necesitar de mi ayuda para las operaciones matemáticas seguí siendo un cero a la izquierda, pero todavía más solo.

Habíamos perdido ya la cuenta del tiempo que llevábamos allí metidos cuando oímos unos ruidos.

Parecía que algo se movía sobre nosotros, algo o alguien estaba quitando la arena, ¡por fin!, la luz nos dejó entrever que estábamos salvados.

La mascota de Nicolás, un gran perro mastín, estaba escarbando en la arena para divertirse y cuál fue su sorpresa al encontrar allí algo que le encantó.

Su boca babeante nos dio mucho miedo, porque pensamos: «otra vez nos vamos a mojar».

Pero, a lo lejos se oyó:

— Buck, ¿qué estás haciendo? Era Nicolás.

Nuestro viejo profesor se acercó hasta el arenero y vio con asombro que allí estaba su cuaderno.

Lo cogió con cariño y lo estrechó entre sus brazos, no sin antes quitarnos parte de la arena que lo ensuciaba.

— Nicolás exclamó: ¡qué alegría! Te he encontrado.

Y mirando su viejo cuaderno, los recuerdos volvieron a llenar su cabeza, volvió a las aulas llenas de niños, de risas, de letras, de números…

Nicolás limpió con esmero aquel cuaderno al entrar a casa, no sin antes preguntarse cómo había acabado en el arenero de su casa.

Una sonrisa llenó su cara al pensar en sus nietos, en cómo ocultaron durante años la pequeña travesura que había hecho. Al preguntarles por ella no lo negaron y, por ello, Nicolás nunca pensó en echarles una regañina —aunque ahora los dos niños eran ya adultos—, sino que solo podía pensar en que había recuperado su cuaderno, el que le había acompañado durante toda la su carrera docente. Aquel cuaderno lleno de números con el que enseñaba matemáticas a niños y niñas que ansiaban aprender.

Y entonces yo volví a respirar tranquilo porque, aunque era un cero a la izquierda y no valía mucho, volví a sentirme seguro entre aquellas páginas.

Hoy, ese viejo cuaderno de tapas duras sigue siendo mi casa, además de ser un tesoro para uno de los nietos de Nicolás, uno de los que lo enterró en aquel arenero.

Porque Miguel, siguiendo la vocación de su abuelo, se convirtió en profesor de matemáticas y, muchos años después, sigue utilizándolo en sus clases.

En él no solo se recogen las enseñanzas de su abuelo, sino que refleja el amor que Nicolás sentía por los números. En él, ni un cero a la izquierda, como yo, estará nunca solo.

I Jornadas de materiales para el aula de Matemáticas en Secundaria (Gijón – Mayo 2023)

por

María Amo Marín

(IES Santa Emerenciana, Teruel)

El fin de semana del 19, 20 y 21 de mayo tuve el privilegio de asistir a las primeras jornadas de materiales para el aula de secundaria que se celebraron en Gijón. Unas jornadas muy intensas, instructivas, interesantes y enriquecedoras. Desde aquí agradecer a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas así como a la Sociedad Asturiana de Educación Matemática Agustín de Pedrayes, por la buena organización y a la Sociedad de Profesores de Matemáticas de Aragón Pedro Sánchez Ciruelo por animarme a asistir como docente propuesta desde nuestra sociedad.

En estas líneas voy a tratar de resumir lo vivido allí aunque este tipo de eventos es mejor que «no te los cuenten».

Tras el saludo de la alcaldesa de Gijón como apertura de las jornadas en cuyo discurso nos instó a enseñar a nuestro alumnado de forma que no sean personas fácilmente manipulables y que sean libres a través del conocimiento, llegó la primera conferencia. Esta vino de la mano de Lluis Mora y el título de la misma fue *¿Qué decisión nos sugieren los datos?* Lluis comenzó comentando que los datos nos permiten tomar decisiones cuando los analizamos y que esas decisiones pueden llevar a cambios individuales y colectivos. El objetivo de la conferencia era aportarnos algunas herramientas que nos permitieran relacionar el sentido estocástico con el sentido socioafectivo. La idea es partir de la experimentalidad para llegar a modelizar y poder sacar conclusiones. Es interesante hacer las cosas desarrollando varias estrategias ya que, si hay error, es más fácil detectarlo y aprender del mismo, que si todo se ha llevado a cabo del mismo modo y no podemos detectar el error si lo hay. A partir de actividades del tipo *simplex lock*, *webquest*, proyectos, trabajo en grupo…, se puede fomentar el pensamiento crítico y por tanto, una toma de decisiones argumentada.

Tras el descanso llegó el turno de las comunicaciones, comenzando con María Oliva San Martín Fernández con su comunicación *Taller de matemáticas: Mi chaleco geométrico*. Tal y como ella nos comentó, este taller consiste en la construcción de un chaleco con ayuda de dos láminas de cartulina. Ella comenta a su alumnado que la geometría nos permite transformar una superficie plana en la prenda que queremos vestir (que en este caso es el chaleco). A partir de una lámina de 40×60 cm y con ayuda de metro, regla, lápiz, tijeras, calculadora y grapas o hilo se construye el chaleco de la talla S siguiendo los pasos de la figura 1.

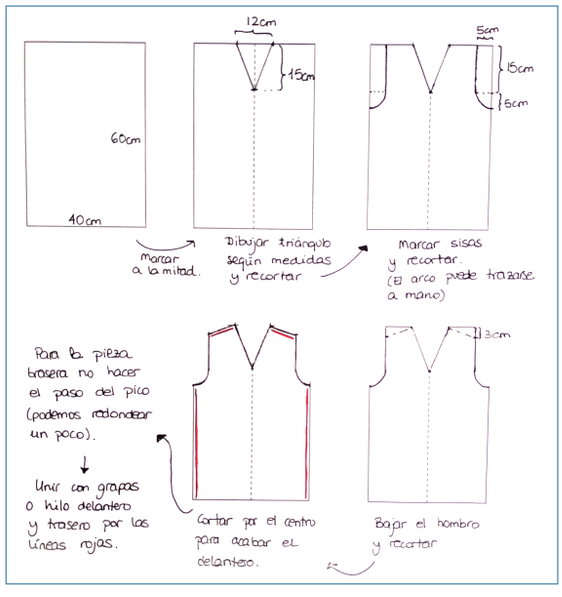


Figura 1

De todas las piezas que se van recortando se puede calcular el área por lo que se puede saber el área del chaleco, la superficie relativa en tanto por ciento que se desecha…, es decir, podemos, a través de las matemáticas, saber el material aprovechado y desaprovechado. Se puede trabajar también el concepto de semejanza creando chalecos de diferentes tallas (sabiendo que las tallas se diferencian en 4 cm de contorno). María Oliva nos transmitió que ella ha llevado a cabo este

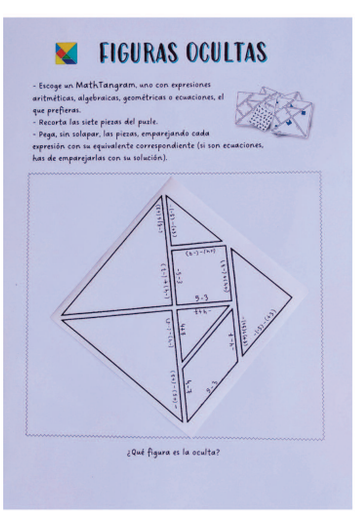
taller con el alumnado de todos los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria, adaptando las distintas actividades a realizar a partir de la construcción del chaleco.

La segunda comunicación fue *Materiales para la medida de superficies* y la impartieron Ana Rosa Díaz, José Manuel Vidal y María Nila Pérez. La actividad se enmarca dentro del proyecto «Matemáticas Newton Canarias» y el objetivo es que el alumnado sea consciente de qué es el área, pero no como una fórmula en la que se multiplican longitudes sino como la parte de plano que ocupa una determinada figura midiendo superficies directamente, con regletas, cubriendo las superficies con cm^2, descomponiendo unas figuras en otras más sencillas para completar la superficie…, de modo que lleguen a deducir por qué se pueden usar esas fórmulas o de qué manera puede conocer el área de figuras irregulares. Recalcaron que muchas veces no llegan a comprender el concepto de área hasta que no «experimentan» con él.

La jornada del viernes finalizó con la comunicación *Una aproximación metodológica a la enseñanza de las matemáticas a través de canciones* a cargo de Ana M. Pilar Martín y Gema R. Quintana. Ellas nos mostraron cómo las canciones pueden servir para afianzar conocimientos. La actividad que han llevado a cabo con su alumnado consiste en que los chicos y chicas elaboren las letras de canciones tomando como base musical canciones conocidas. Una vez hecha la letra, se graban y lo envían a las profesoras. Nos comentaron que los integrantes del departamento de matemáticas predicaron con el ejemplo y fueron los primeros en hacer la actividad para mostrarla al alumnado, consiguiendo de este modo que los alumnos y alumnas vieran la actividad factible e instructiva. Las canciones han sido elaboradas en todos los cursos de secundaria y bachillerato y quedan recogidas en su blog.

La jornada del sábado comenzó con la segunda conferencia: *¡Vamos a explotar! Exploding dots: aritmética visual* impartida por Eulalia Tramuns. En ella, además de presentarnos el Global Math Proyect, un proyecto que se está llevando a cabo a nivel mundial y con el que se pretende difundir las matemáticas de una manera divertida, nos hablaron de *exploding dots*. Estas máquinas (que podemos incluso elaborarlas en 3D), nos facilitan hacer cambios de base y plantear distintos tipos de actividades en las diferentes bases. También permiten hacer operaciones básicas: suma, multiplicación y división (si bien no explica la regla de signos) en cualquier base. Además, con la idea de los *antidots*, también se pueden hacer restas vistas como suma del opuesto. Trabajando con estas máquinas se fomenta el autoaprendizaje y se contribuye a competencias como resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación y representación, sentido socioafectivo…

Tras una breve pausa dieron comienzo los talleres. Se llevaron a cabo varios de ellos de forma simultánea y pudimos hacer uno por la mañana y dos por la tarde. El primero al que asistí fue *Va de retos* de María Fernández Correa. Al comenzar, María nos comentó que las actividades que ella propone, y que hicimos en el taller, estaban pensadas para trabajar la resolución de problemas y la socioafectividad. Son actividades que los alumnos/as no suelen rechazar ya que las ven como algo lúdico y, sin embargo, pueden contribuir, y mucho, al desarrollo de su aprendizaje.



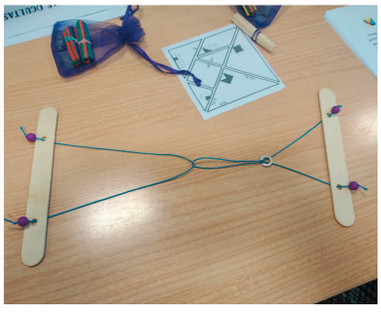


Figura 2

Los primeros retos que nos presentó fueron una serie de acertijos matemáticos de tipo gimnasia matemática llamados *Mates por los ojos*. Posteriormente nos presentó Witty Hallow, Asuntos geométricos y Puzles (dominó mágico, adivipuzles, figuras ocultas, puzles imposibles…). Se pueden ver ejemplos de algunos de ellos en la figura 2. Durante este taller nosotros fuimos alumnos y alumnas y resolvimos, entre todos, algunos de los acertijos. Pudimos ver de este modo las dificultades que pueden surgir y cómo el trabajo colaborativo es una gran herramienta para favorecer el aprendizaje.

Figura 3

Al acabar este taller asistimos a una muestra de actividades con materiales manipulativos. Allí pudimos ver y tocar materiales (muchos de ellos de yincanas matemáticas) y pudimos coger muchas ideas para nuestros centros, ya que, en general, eran materiales bastante sencillos de reproducir. Algunos ejemplos de los expuestos pueden verse en la figura 3.

El primer taller de la tarde al que asistí fue *Primeros pasos con geogebra 3D*. En él José Manuel Arranz, todo un experto, nos hizo ver que con unos pocos conocimientos de esta herramienta (trabajamos con Geogebra 5.0) podemos enriquecer mucho nuestras clases a todos los niveles, tanto en ESO como en bachillerato. Nos animó a dibujar prismas, pirámides y cuerpos de revolución, a usar deslizadores, a comprobar la relación entre el volumen de un prisma y una pirámide de la misma base y altura… Intersecamos planos con figuras y planos entre ellos, viendo que los resultados son figuras planas o rectas, obtuvimos cónicas a partir del cono… Todo desde una perspectiva muy sencilla, con pocos pasos y muy intuitivos con la que José Manuel consiguió que todos los asistentes nos fuéramos con ganas de implementarlo en cuanto llegáramos a clase.

El último taller, con el que se acababa la jornada del sábado, fue *Actividades prácticas para el aula a través de la construcción real de superficies*. De la mano de María García Monera construimos la figura 4 a partir de plantillas, simplemente con la ayuda de unas tijeras. María nos comentó que en su página web podemos encontrar plantillas de diferentes figuras y que una vez generadas se pueden llevar a cabo actividades de cálculo de áreas, de cálculo de errores (el programa con el que ella trabaja da áreas exactas y con las calculadas se puede ver el error cometido con el cálculo), sacar conclusiones y tomar decisiones a partir de dicho error, etc. La docente proponía hacer las figuras en grupos con el fin de poder acabarlas en una sesión y poder llevar a cabo las actividades relacionadas en posteriores sesiones de clase. Con las plantillas que están disponibles en la página web se pueden construir figuras tan diversas como las que se ven en la figura 5.

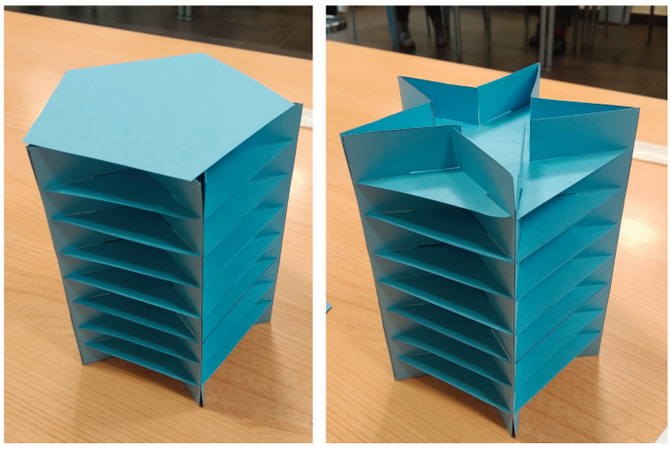


Figura 4

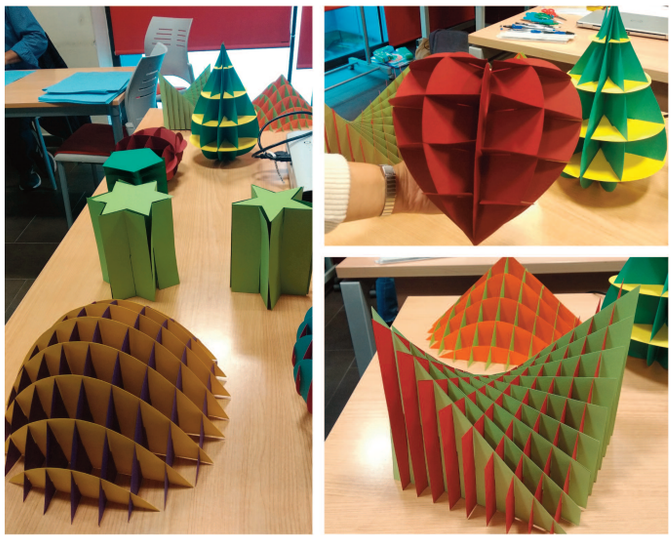


Figura 5

La jornada del domingo comenzó con Belén Palop y su charla sobre «pensamiento computacional». En primer lugar nos hizo ver que el pensamiento computacional no es programar un robot. Lo primero que hay que hacer es entender el algoritmo, hacerse muchas preguntas para poder implementar algo simple, razonar la manera de enfrentarnos a un problema sobre unos datos con el objetivo de que un ordenador lo resuelva. A veces es importante dedicar alguna sesión a llevar a cabo ese razonamiento de forma manipulativa para andamiar el aprendizaje y que luego se pueda proceder y aprender de una manera más rápida. El pensamiento computacional lo podemos llevar a nuestras aulas desde todos los sentidos asociados a los saberes. Algunos ejemplos podrían ser colores de Minecraft y código hexadecimal en el sentido numérico, cómo calcula el GPS la ubicación de un usuario para el sentido de la medida, dar explicación a por qué se pierde calidad al girar una imagen de píxeles para trabajar el sentido espacial, qué es la recursividad y cómo funciona como trabajo del sentido algebraico o cómo deciden las diferentes plataformas qué quiero ver para fomentar el desarrollo del sentido estocástico. Y todo ello hecho desde la curiosidad, la admiración, con seguridad en ellos mismos y con alegría, consiguiendo así trabajar también el sentido socioafectivo.

Para concluir las jornadas asistimos a cuatro comunicaciones. La primera de ella fue *El rescate del quesoro* en la que Alejandro Targhetta nos presentó una situación de aprendizaje usando las matématicas fuera del aula para que los chicos y chicas las vean «sin miedo». La actividad se llevó a cabo en un supermercado donde se decoró todo al detalle para favorecer el acercamiento del alumnado al *stand* y así comenzar el desarrollo de la actividad. El objetivo es rescatar un «quesoro» que tiene un pirata y para ello han de resolver acertijos y retos usando el ingenio y, por supuesto, las matemáticas (sobre todo la geometría). Pudimos ver cómo chicos y chicas de distintas edades y que no se conocían entre sí trabajaban juntos para conseguir el objetivo final.

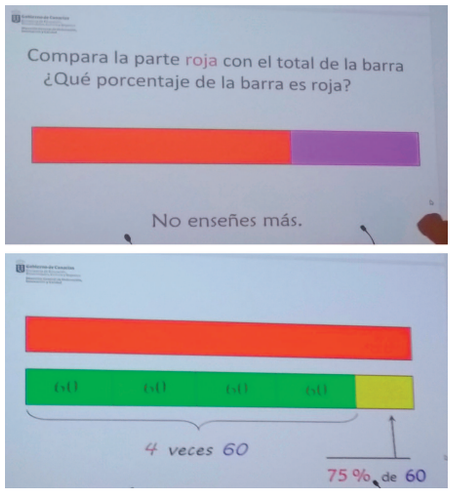


Figura 6

La segunda comunicación fue *Proporcionalidad geométrica*, donde José Manuel Vidal nos enseñó cómo con ayuda de unas barras coloreadas (figura 6) se puede ver la división como instrumento para comparar, usar la multiplicación para reducir, entender que el concepto de «veces menor» se define a partir del de «veces mayor»… Hizo mucho hincapié en que es importante que el alumnado verbalice lo que busca (comparar, aumentar…) y después que indiquen las matemáticas que se necesitan. Y matizó la importancia del trabajo en grupo, de estimar, de hablar y de llegar a conclusiones entre todos ya que el proceso de enseñanza – aprendizaje es mucho más enriquecedor.

Tras un breve descanso llegó la tercera de las comunicaciones, a cargo de Bárbara Alonso Runo donde nos presentó *Geometría y modelización: Una experiencia en Secundaria utilizando el diseño e impresión 3D*. La ponente nos explicó que aprovechando que en su centro tienen una impresora 3D, pensaron que podría ser buena idea modelizar problemas clásicos de áreas y volúmenes para ayudar a la visualización espacial y con ello a la resolución de dichos problemas. El alumnado fue el responsable de todo el proceso de creación con lo que también trabajaron programación en Scratch. Aprovechando todo el trabajo, hicieron aplicaciones más allá del aula, llevando a cabo el proyecto «Sonrisas sanadoras» con el que se pretende animar y apoyar a los niños que están en el hospital e intentar hacer que su estancia allí sea más agradable, creando con un programa de diseño 3D figuras y objetos que se pueden poner en diferentes aparatos médicos (goteros, pulsioxímetro…). A todos los asistentes nos pareció un proyecto maravilloso.

Hubo una cuarta comunicación titulada *Retos con policubos: una actividad manipulativa, reflexiva y de instrucciones sencillas*, a cargo de Andrea de la Fuente, Rocío Garrido y Juan José Santaengracia pero lamentablemente no pude quedarme ya que era el momento de salir hacia el aeropuerto para volver a Teruel y contar a mis compañeros de departamento estas metodologías y acordar que algunas de las cosas aprendidas las llevaríamos a cabo en el próximo curso.

Como he comentado al principio del escrito, fue un fin de semana de aprendizaje continuo, del que aquí solo se muestran unas pinceladas (es imposible contar absolutamente todo lo aprendido). Reiterarme en los agradecimientos ya mencionados e instaros a todos y todas a participar en jornadas de este tipo en las que las conferencias, ponencias, talleres…, así como las conversaciones compartidas en ratos de comidas y pasillos enriquecen mucho como docentes.

La SAPM en la Noche Insomne de juegos alternativos

por

Esther García Giménez, Germán Sánchez Del Río y Pablo Beltrán-Pellicer

(IES José Manuel Blecua, Zaragoza; Colegio María Auxiliadora, Zaragoza; Facultad de Educación, Zaragoza)

El sábado 23 de septiembre tuvo lugar la Noche Insomne de juegos alternativos, un evento para todos los públicos alrededor de juegos de mesa que van mucho más allá del Monopoly o el Trivial. La Noche Insomne viene celebrándose desde el año 2016 en la Sala Multiusos del Auditorio de Zaragoza, siendo organizada por el Club Tercios y el Ayuntamiento. El horario, de 17:00 a 5:00 llama la atención, pero es lo que da nombre al evento. Además, cuando empiezas a jugar, a veces, pierdes la noción del tiempo. Por supuesto, no es obligatorio estar las 12 horas. De hecho, hay un horario donde hay mesas reservadas para juegos infantiles hasta las 21:00.

Figura 1: Cartel de la Noche Insomne

Las actividades son variadas y os remitimos a la web de la Noche Insomne para saciar vuestra curiosidad, porque, si es la primera vez que oís hablar de esto, es algo que merece la pena. Por un lado, hay mesas de juego libre para que vayas a la gran mesa central a coger prestado un juego y disfrutarlo con tus amigos. Por otro, hay mesas con demostraciones prácticas, partidas organizadas, juegos de rol, etc.

La participación de la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas consistió en responsabilizarse de dos de las mesas de la zona infantil (figura 1). En ellas, el objetivo era tratar de mostrar algunos juegos con una relación muy clara con las matemáticas, mostrando de manera informal las matemáticas que hay en ellos. En realidad, casi cualquier juego de mesa tiene su puntito matemático, pero los elegidos para la ocasión fueron los juegos: *Set*, *Sushi Go Party*, *Bolsa de patatas* y *Robo Rally*.

Figura 2. Las dos mesas de la SAPM en la Noche Insomne

El binomio matemáticas y juegos es bien conocido y no nos detendremos aquí en explorarlo en profundidad, ya que hay mucha bibliografía. No obstante, antes de describir los juegos que llevamos a las mesas, sí que queremos señalar, en cuanto a su uso educativo, que no es lo mismo el aprendizaje basado en juegos que lo que se conoce como gamificación. Gamificar o ludificar, como verbos que son, implican convertir en juego algo que no lo es, introduciendo mecánicas propias de los juegos (niveles, puntuaciones, turnos, roles, etc.). Dejando de lado que las matemáticas en sí tienen mucho de juego, el aprendizaje basado en juegos en matemáticas supone emplear juegos que tienen interés, bien sea porque movilizan y desarrollan los procesos propios de las competencias específicas (por usar la jerga curricular) o contenidos matemáticos. Por supuesto, su uso en el aula exige una planificación y, más allá de jugar, se trata de reflexionar sobre el juego en sí. Una pregunta tan sencilla como si existe estrategia ganadora u óptima y por qué puede movilizar muchas matemáticas.

Nuestras queridas Jornadas de Educación Matemática en Aragón (JEMA) suelen tener algo de juegos. Por ejemplo, en las recientes V JEMA, Clara Grima nos habló de juegos en su ponencia de clausura y, en las IV JEMA, algunos miembros del grupo SET de la Asociación de Barcelona para el Estudio y Aprendizaje de las Matemáticas (ABEAM) presentaron la comunicación «Juegos de mesa como herramienta pedagógica para el aprendizaje de las matemáticas», cuya presentación está disponible en la web de la jornada.

Pero, dejémonos de contextualización y pasemos a desgranar un poquito los juegos que presentamos a los que se acercaron a nuestras mesas.

Set

Figura 3. Emoción y matemáticas con el juego *Set*

De los juegos que llevamos, el *Set* (Marsha J. Falco) quizá fuera el menos llamativo a primera vista. Sin embargo, engancha enseguida y nos ofreció momentos muy divertidos, además de muy matemáticos (figura 3).

La presentación del juego comenzaba sacando unas cuantas cartas del mazo que compone el juego, preguntando: ¿en qué se parecen?, ¿en qué se diferencian?, ¿sabrías decir cuántas cartas tiene la baraja? El objetivo de estas preguntas es no empezar directamente contando las reglas, sino haciendo matemáticas desde el principio. Preguntar por las semejanzas y diferencias de las cartas hace que los jugadores se centren en los atributos o características de las figuras que aparecen en ellas: forma, color, cantidad y relleno. De esta manera, sabiendo los valores posibles de cada uno de ellos, nos encontramos con un pequeño problemita de conteo o combinatoria, que podría plantearse ya en el último ciclo de Educación Primaria.

Antes de explicar las reglas, algo muy interesante es preguntar directamente cómo se podría jugar con esas cartas. Las respuestas son muy ricas y dan lugar a la creación de juegos o adaptación de algunos que ya conocen. En cuanto al juego, consiste en identificar *sets* en un conjunto de 12 cartas, definiendo *set* como tres cartas tales que, para un mismo atributo, o bien todas las cartas son iguales, o bien todas son distintas. En la figura 4 (derecha) tenemos un ejemplo de *set*, ya que las cartas coinciden para cantidad, pero difieren en color, relleno y forma. A partir de aquí, surgen montones de preguntas que no

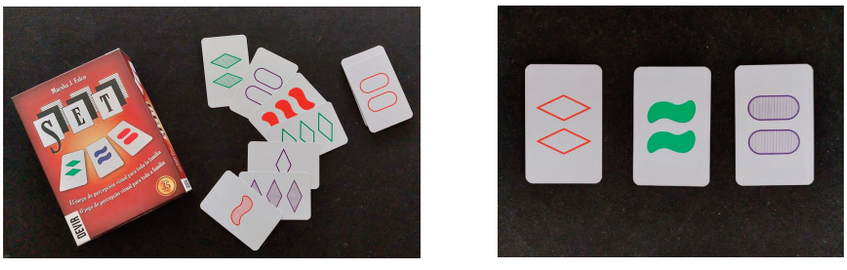


Figura 4. Algunas cartas del juego *Set* (izquierda) y ejemplo de *set* (derecha)

tienen techo: dadas dos cartas, ¿siempre hay una tercera con la que se hace *set*?, ¿cómo la averiguarías?, ¿siempre hay al menos un *set* cuando se exponen 12 cartas al azar?, ¿sistematizas de alguna manera tu búsqueda de *sets*?, ¿qué algoritmo de búsqueda es mejor? Finalmente, una actividad muy, muy interesante es que alguien explique el juego a otra persona. Por lo demás, si quieres probar el *Set*, puedes realizar el reto diario en su web.

Sushi Go Party

El *Sushi Go Party* (Phil Walker-Harding) no es más que la versión extendida del *Sushi Go*, un juego que conocían prácticamente todos los que se acercaron a nuestra mesa. En este se reparten unas 10 cartas a cada jugador (depende del número de jugadores), representando cada una de ellas un tipo de comida japonesa. Se juega a tres rondas y, en cada una, los jugadores por turnos se quedan con una carta, dejándola al descubierto sobre la mesa, y pasan las demás al jugador de su izquierda. Los puntos obtenidos en cada ronda dependen de las cartas que has bajado, ya que cada tipo de cartas puntúa de forma diferente. Por ejemplo, en la figura 5 se observan las cartas de *onigiri*. Si forman parte de nuestro menú y están en juego, podremos hacer hasta un máximo de 16 puntos, si conseguimos las cuatro formas diferentes.

Figura 5. *Sushi Go Party*: conjunto de cartas de *onigiri*

Además de preguntar cuántos puntos puedo hacer como máximo con un determinado tipo de carta, hay que tener en cuenta la incertidumbre, pues no sabemos si se han repartido todas las cartas de un tipo en una ronda en concreto. Por lo menos, hasta que no vuelve a tocarnos el paquete de cartas con el que comenzamos la partida. De esta manera, ofrecería una explotación en el aula muy clara de cara al sentido estocástico, poniendo en juego el concepto de probabilidad condicionada, por ejemplo.

Bolsa de patatas

En *Bolsa de patatas* (Mathieu Aubert y Théo Rivière) vamos a tener toma de decisiones en contextos de incertidumbre en un juego con una presentación muy atractiva. Se reparte a cada jugador una serie de cartas de objetivo. Una ronda se compone de cuatro fases a lo largo de las cuales cada uno se irá descartando de cartas de objetivo, hasta quedarse con dos que crea que se cumplirán finalmente y con una que no se cumplirá. En cada fase se extrae cierto número de patatas de la bolsa. Como hay 25 patatas de diferentes sabores (7 normales, 6 de cebolla, 5 picantes, 4 de vinagreta y 3 de pollo) y en cada fase se extraen sucesivamente cinco, cuatro, tres y dos (estas últimas

en orden), no todas van a salir y hay que tenerlo en cuenta. Los objetivos pueden ser que haya el mismo número de un tipo de que de otro al final; tantos puntos si hay al menos tantas patatas de una clase; etc. Para una descripción más detallada del juego podéis ir a su web. Sin embargo, con lo que hemos adelantado es suficiente para percibir la idea de probabilidad condicionada, pues el juego permite ajustar nuestras decisiones con la información que va poniéndose a disposición de los jugadores.

Figura 6. Bolsa de patatas

Robo Rally

El pensamiento computacional es una de las novedades de los nuevos currículos y, de hecho, ya en alguna de las preguntas que hemos mencionado en el juego del *Set*, se pueden identificar elementos de este. Ahora bien, en el juego que nos ocupa ahora, *Robo Rally* (de Richard Garfield) es todavía más evidente, aunque también está muy presente el sentido espacial y de la medida (giros, distancias) y el estocástico (riesgo e incertidumbre). En este juego de tablero (figura 7), cada jugador ha de programar un robot para conducirlo hasta los puntos de control necesarios para ganar la partida. Para ello tendrá a su disposición cartas de avance, de giro y otras. La dificultad radica en que no sabes lo que van a hacer los demás.

Figura 7. Robo Rally en acción

Se adaptó el juego para la Noche Insomne con el fin de agilizar las partidas:

— Se eliminaron de la partida las compras de mejoras de cada robot, que detiene el ritmo de juego al tener que decidir qué elementos comprar para tu robot y provocar modificaciones en el funcionamiento de las reglas básicas conforme se van incorporando más mejoras.

— Las fichas de energía dejarían de tener sentido con la primera regla modificada, pero en esta versión adaptada tienen otra utilidad. Con una ficha de energía puedes descartar una carta que vayas a recibir de *spam* o quitarte una carta de *spam* de tu mano de programación cuando la robes.
— Las cartas de gusano y virus se quitaron del juego, quedando solo las cartas de *spam*, que recibes al salir del tablero, al recibir el disparo de un láser y al ser empujado por otro robot. Sin embargo, se realizó una modificación al recibir una carta de *spam*. Esta carta se coloca en la parte superior del mazo de cartas de programación que vas a robar. Es decir, es seguro que robarás una carta de *spam* en la siguiente fase.

Gracias a estas pequeñas modificaciones el juego es más dinámico para todos los jugadores y las reglas eliminadas permiten que aficionados más jóvenes puedan acceder al juego, mejorando su visión espacial y su capacidad de programación de acciones derivadas de otras acciones previas. Si te apetece probar el juego, hay una *app* de Android y existen páginas web donde jugar *online*.

Conclusión

Con este artículo hemos querido dar a conocer un evento ya consolidado en Zaragoza, la Noche Insomne, que ofrece sinergias muy interesantes en lo que respecta a la relación de las matemáticas con los juegos de mesa. Además, es posible que los lectores encuentren ideas para llevar al aula estos u otros juegos y hacer un aprovechamiento didáctico. Finalmente, no sería descabellado pensar en la creación de un grupo de juegos en nuestra sociedad, al estilo del grupo SET de ABEAM. Basta con que haya socios interesados.

No solo PDI (I)

por

Ana Isabel Blasco Nuño, Carmen Soguero Pamplona y Ricardo Alonso Liarte

(CEIP Ricardo Mallén, Calamocha; Universidad de Zaragoza, Teruel;

IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Entrar en un aula de Educación Infantil siempre es un regalo para los ojos. Los vivos colores del material que inunda las estanterías asaltan la retina. Y es que, en esta etapa, resulta crucial ofrecer al alumnado la posibilidad de acceder a un aprendizaje experiencial.

Por supuesto, en lo que se refiere al aprendizaje de contenidos relativos a las matemáticas, esta utilización de material que los propios alumnos manipulan y transforman está en la base de la solidez con que vayan construyendo, con el tiempo, su propio conocimiento matemático.

En la descripción de las áreas de conocimiento de la etapa que plantea el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil, concretamente en el área 2 Descubrimiento y Exploración del Entorno, encontramos una clara alusión a la cuestión del aprendizaje a través de la manipulación:

> Con esta área se pretende favorecer el proceso de descubrimiento, observación y exploración de los elementos físicos y naturales del entorno.
> El alumnado, alentado por el interés y la emoción, participará con iniciativa propia en situaciones de aprendizaje en las que interaccionará con objetos, espacios y materiales. Mientras manipula, observa, indaga, prueba, identifica, relaciona, analiza, comprueba, razona… descubrirá las cualidades y atributos de los elementos del entorno más cercano.

Y si nos vamos a las competencias específicas, encontramos que la primera es:

> Identificar las características de materiales, objetos y colecciones y establecer relaciones entre ellos, mediante la exploración, la manipulación sensorial, el manejo de herramientas sencillas y el desarrollo de destrezas lógico-matemáticas para descubrir y crear una idea cada vez más compleja del mundo.

En este sentido Alsina (2022) nos recuerda su «Enfoque de Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas», en el cual contempla tres niveles de contextualización de la actividad: contextos informales, contextos intermedios y contextos formales. Los primeros implican situaciones de aula que llevan al alumnado a visualizar los conceptos matemáticos a través de juegos y actividades manipulativas, ligadas a su realidad más cotidiana. Estos contextos permiten que los niños «encuentren» los conceptos en los objetos de una forma libre, llegando a las conclusiones por sus propios medios a partir de la manipulación. Siempre con la guía del docente que, con una adecuada planificación, les irá llevando hacia la correcta interpretación de la situación.

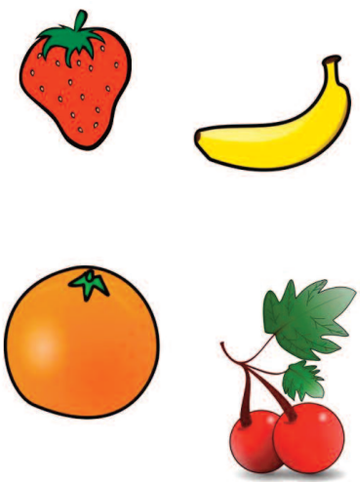
Los contextos intermedios proponen el uso de representaciones de la realidad como una vía para iniciar el proceso de formalización que requiere todo contenido matemático. En este punto se consideran los medios tecnológicos que permiten manipular los objetos virtuales. Es decir, facilitan que los niños manipulen representaciones de los objetos reales, lo que supone un grado de abstracción superior al de los contextos informales. Este es el papel que pueden jugar las aplicaciones desarrolladas con la herramienta GeoGebra, específicamente para la etapa de Educación Infantil. El uso abundante de imágenes fieles a la realidad o la reproducción virtual de situaciones cotidianas, llevan al alumno a ir asumiendo ese plus de abstracción en su aprendizaje. Además, estas herramientas ofrecen ciertas ventajas sobre el material manipulativo o sobre las «fichas», como la posibilidad de generar actividades con condiciones iniciales distintas, o la de mostrar y modificar objetos que normalmente no están al alcance del aula. Sin embargo, el uso previo del material manipulativo es insoslayable.

Avanzando en el nivel de abstracción, tras trabajar los contextos formales e intermedios, llegaremos al uso adecuado del lenguaje matemático, trabajando ya en contextos formales como última fase de la secuencia.

En los artículos que venimos publicando en esta sección nos movemos en el nivel de los contextos intermedios, pues proponen el uso de aplicaciones hechas con GeoGebra para trabajar en el aula contenidos matemáticos. En esta ocasión, traemos la «precuela». Proponemos el trabajo con contextos formales, con material manipulativo ligado a las aplicaciones para la pizarra digital interactiva (o tableta), de forma previa al uso de esta. Hemos realizado una selección de aplicaciones que se han trabajado en un aula de infantil realizando previamente diversas actividades con material manipulativo derivado de las aplicaciones. Es decir, primero manejan con sus propias manos el material que luego aparecerá en la PDI.

Hemos seleccionado, para comentar, un conjunto de aplicaciones junto con sus correspondientes materiales descargables e imprimibles. De todas ellas vamos a dar unas pequeñas orientaciones de uso, aunque lo mejor estará siempre en la imaginación del docente que las use.

Frutas preferidas



La referencia a esta actividad se publicó en el número 37 de Entorno Abierto (noviembre de 2020), entre un conjunto de propuestas para trabajar la estadística desde las primeras edades, construyendo gráficos con los recuentos realizados, en este caso, de la cantidad de niños y niñas en el aula que prefieren una de las cuatro frutas que se ofrecen. La actividad que se muestra en la PDI ofrece dos gráficos, una vez introducidos los datos del recuento, y hay que decidir cuál de los dos representa los datos recogidos.

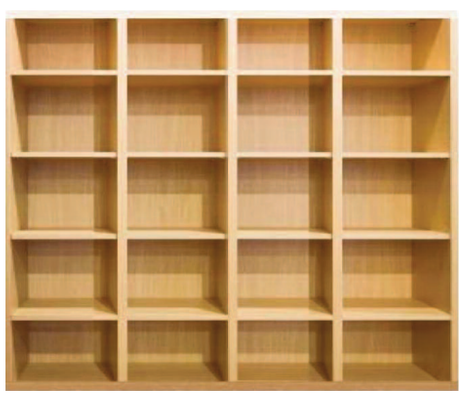
Introducir el material manipulativo (las frutas plastificadas con un velcro en la parte posterior) permite a los niños construir de forma colaborativa la gráfica colocando cada uno de ellos su fruta directamente en el gráfico (un papel continuo sobre la pizarra, con cuatro tiras de velcro para que vayan pegando las frutas, es suficiente).

Posteriormente, pueden analizar si la gráfica obtenida sobre la pizarra coincide con alguna de las dos que ofrece la actividad interactiva.

Globos y juguetes

Publicado en el número 40 de Entorno Abierto (mayo del 2021), se presenta como una actividad abierta para trabajar la orientación en el plano y la localización de los objetos según su posición. Paralelamente, se fomenta el uso del lenguaje relacionado con la orientación espacial, para definir de forma precisa dónde se colocan unos objetos respecto a otros.

En la propuesta que presentamos ahora se ha incluido al final de la actividad un archivo con el material fotocopiable necesario. Sería necesario imprimir las hojas y plastificar cada uno de los elementos: estantería, globos y juguetes por separado así como colocar pequeños trozos de velcro tanto en las celdas de la estantería como en cada uno de los juguetes y globos.

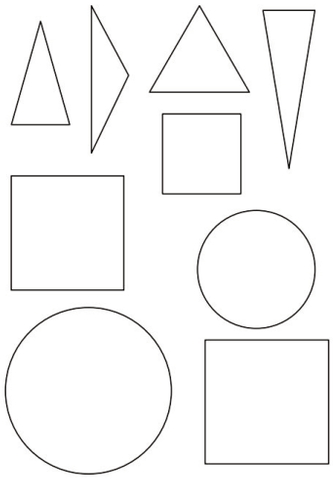


El juego puede realizarse en dos sentidos: un niño, de espaldas a la PDI, ha de repetir con su material plastificado la posición que aparezca en la actividad. Previamente algunos alumnos distribuirán parte o todos los globos sobre la estantería de la pizarra. Posteriormente, por turnos, el resto de alumnos va describiendo las posiciones de los objetos sobre la estantería. El trabajo del gran grupo consiste en verbalizar de forma correcta las posiciones: al lado de, encima de, debajo de, etc., para que el alumno pueda ir pegando los objetos sobre la librería plastificada.

Por otra parte, de forma inversa, un alumno se encuentra en la PDI. Al darle al botón OTRO aparecerá una disposición de los juguetes sobre las baldas que otro alumno deberá colocar en el material manipulativo. Para completar la disposición final de la estantería, el mismo alumno u otro, deberán colocar en los estantes varios de globos que ofrece la actividad. A partir de ese momento, se deberán describir las posiciones para que el alumno que está en la PDI replique de forma correcta dicha colocación sobre la estantería virtual que ofrece la pantalla interactiva.

Los tres pintores

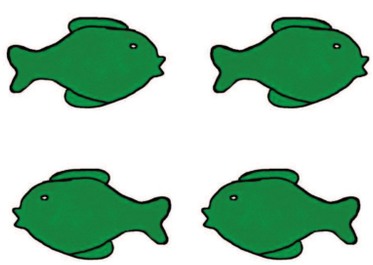
Se trata de una aplicación ya descrita en el número 34 de Entorno Abierto (mayo del 2020). El desarrollo de la actividad se integra con el relato de un cuento, a lo largo del cual, el alumnado debe realizar varias acciones a través de la cuales se trabajan los contenidos: selección, redimensionado y coloreado de figuras geométricas básicas (triángulo, cuadrado y círculo) a través de tres personajes que son pintores. Al final del cuento se plantea la realización de una obra colectiva mediante los tres tipos de figuras, con diferentes propiedades en cuanto a tamaño, color, etc. La propuesta de integrar material manipulativo se centra en esta parte de la actividad. Se trata de realizar una producción real, un cuadro montado a partir del material descargable (figuras recortables de los tres tipos en distintos tamaños y listos para pintar o bien se pueden fotocopiar sobre hojas de colores), y dibujos propios del alumnado tomando como modelo las figuras recortadas. Si el docente lo considera oportuno, se podrían añadir figuras recortadas de material impreso (revistas o periódicos) que mostraran objetos de la vida real que tienen alguna de las formas tratadas.



El trabajo con el material manipulativo se plantea como un complemento al trabajo con la aplicación en la pizarra digital interactiva, y cobra su mayor sentido después de haber trabajado el cuento en gran grupo, ya que concretará la historia en una obra real, perdurable en las paredes del aula.

De pesca

La aplicación, propuesta en el número 40 de Entorno Abierto (mayo de 2021) plantea el reconocimiento de cifras hasta el 9, el recuento y la direccionalidad izquierda-derecha. Un pescador esquimal tiene una cesta en la que los alumnos deben introducir tantos peces como indica el número que aparece en la parte superior, y han de ser peces orientados según indica la flecha que también aparece. El material manipulativo que se propone para integrar con esta actividad consiste en un archivo imprimible (De pesca.pdf) que contiene una hoja con ocho peces, cuatro en cada dirección. Se imprimirían 3 hojas (24 peces en total, 12 en cada dirección) que se pueden plastificar, colocándoles además un velcro adhesivo. Por otra parte, se pegaría en la pared del aula una tira de papel continuo con velcro para pegar los peces. De esta manera, al tiempo que un niño coloca los peces en la cesta de la pizarra digital interactiva, otro coge el mismo número de peces impresos y los pega en la tira de la pared, procediendo a contar el total de peces que hay en la pared en ese momento, de cada tipo y de cada orientación, comparando estos últimos verbalmente (de cuál hay más, si es mucho más o poco más...). Si se desea, también se pueden anotar esos números en la pizarra de tiza. En el siguiente turno, aunque la cesta de la PDI se vacía y se parte de cero, en la pared tenemos también los peces de los turnos anteriores y el recuento emplea números mayores e, incluso, el concepto de suma.



Ricitos de oro

El libro de GeoGebra recoge una colección de cinco actividades elaboradas a partir del cuento «Ricitos de oro y los tres ositos» en el cual se incluye diferente material fotocopiable.

Una vez relatado el cuento, los alumnos podrán jugar libremente con los recortables que contiene el archivo *Títeres Ricitos.pdf*. Éste incluye los personajes del cuento y sus objetos más relevantes (silla, cama y tazón de sopa). Podemos plastificarlos y adherirles un palito a modo de marioneta. Después del juego libre, e incluso pueden volver a reproducir el cuento con estos títeres, se puede presentar en el aula tres vasos de diferente tamaño (1 litro, medio litro y un cuarto de litro), o bien, tres cajas de diferente tamaño. El juego consiste en introducir en el vaso o la caja los personajes y los objetos clasificándolos por el tamaño.

En el mismo PDF aparece la casa de los tres ositos. Colocando un velcro en la cama y en la silla de la misma podrán colocar a los personajes en su sitio correcto..

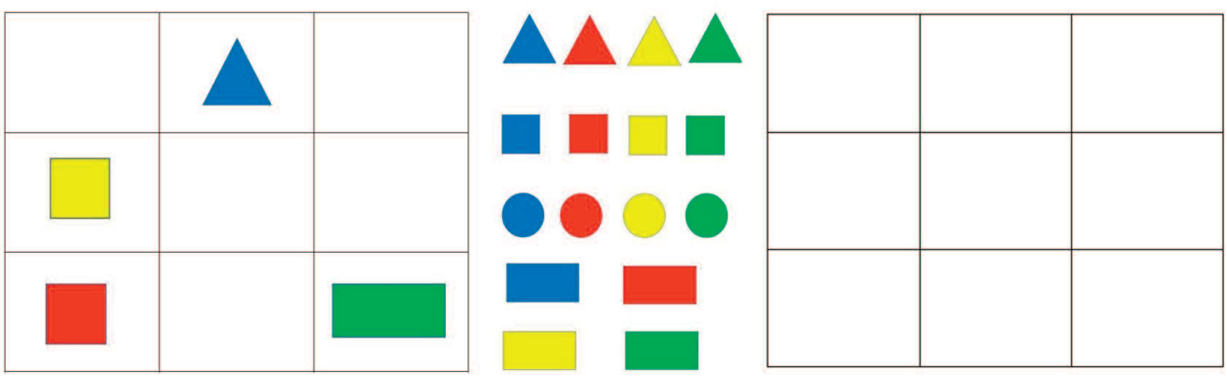
Este material se puede dejar en la biblioteca de aula junto al cuento.

El archivo *Tarjetas de conteo Ricitos.pdf* contiene, como su nombre indica, tarjetas de conteo. En ellas aparecen 1, 2 o 3 personajes u objetos del cuento y en la parte inferior los números 1, 2 y 3. Los niños y niñas deberán de colocar una pinza en el número que corresponda a los objetos que aparecen en el dibujo. En la PDI se reproduce totalmente esta actividad, en ese caso deberán de rodear con el lápiz el número que indica la cantidad correcta. Se puede trabajar simultáneamente de las dos maneras.

El último material es *Clasificación ositos.pdf*. Se trata de un cuadro de doble entrada. Se puede plastificar junto con los objetos que aparecen, colocando un poquito de velcro en los mismos para que los alumnos puedan situar fácilmente los objetos correspondientes a cada personaje del cuento. Se trabajará manipulativamente para después realizar la actividad sobre la pizarra.

Reproduce el modelo

En esta actividad (Entorno Abierto, número 49, noviembre 2022), se adjunta el material para llevarla a cabo como en la PDI. En el material fotocopiable se ofrecen once cuadrículas pequeñas de tamaño 3×3 con diferentes disposiciones de los elementos (cuadrados, círculos, triángulos y rectángulos), que nos servirán de modelo para reproducirla en la cuadrícula grande. En la PDI, la cantidad de modelos es mucho mayor ya que las figuras se colocan aleatoriamente en las distintas celdas de la cuadrícula cada vez que se reinicia la actividad. Es por ello, que se recomienda trabajar antes el material manipulativo para posteriormente realizarlo en la PDI.



Las figuras geométricas (círculo, cuadrado, triangulo y rectángulo) con distintos colores (rojo, azul, verde y amarillo) también se pueden fotocopiar y recortar, o se puede utilizar otro tipo de material que tengamos en el aula, como los bloques lógicos.

El alumnado deberá elegir las figuras geométricas adecuadas y colocarlas en la cuadrícula grande en la misma posición que en la cuadrícula modelo.

En la cuadrícula pequeña aparece una totalmente en blanco para ofrecer la posibilidad de que un alumno coloque determinadas figuras y sus compañeros, tengan que reproducir ese modelo. En este último caso, y en función de la autonomía del alumnado, también se puede ocultar el modelo para que coloquen las formas según las instrucciones verbales de sus compañeros.

En el próximo número de Entorno Abierto completaremos la selección de actividades con material manipulativo.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2022), *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*, Graó, Barcelona.

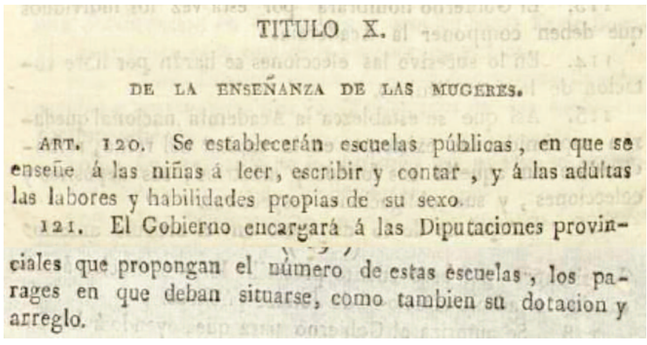
Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil, «BOE n.º 28, de 2 de febrero de 2022, <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-1654&p=20220202&tn=1>.

Matemáticas para niños y matemáticas para niñas

por
Antonio M. Oller Marcén
(Universidad de Zaragoza)

La idea de que la enseñanza tiene que ser conjunta e idéntica para niños y niñas a todos los niveles debería estar ya completamente asentada en la actualidad. Sin embargo, este punto de vista es bastante reciente.

Generalmente se considera que la primera ley general española fue el *Reglamento General de Instrucción Pública* de 29 de junio de 1821. En ese documento (Títulos II, III y IV) se habla en términos generales de la división de la enseñanza en primera, segunda y tercera, así como de los distintos niveles y subdivisiones de dichas etapas. La lectura del documento parecería dar a entender que todos los artículos que conforman esos títulos hacen referencia por igual a niños y niñas, hombres y mujeres. Sin embargo, una lectura detenida de los artículos dedicados a la primera enseñanza nos permite descubrir que «en estas escuelas aprenderán los niños a leer y escribir correctamente, y asimismo las reglas elementales de aritmética, y un catecismo». Con cierta buena voluntad, podría pensarse en que se está utilizando el masculino como neutro, pero todo se desmorona al llegar al Título X, denominado *De la enseñanza de las mugeres*.



TITULO X.

DE LA ENSEÑANZA DE LAS MUGERES.

ART. 120. Se establecerán escuelas públicas, en que se enseñe á las niñas á leer, escribir y contar, y á las adultas las labores y habilidades propias de su sexo.

121. El Gobierno encargará á las Diputaciones provinciales que propongan el número de estas escuelas, los parages en que deban situarse, como tambien su dotacion y arreglo.

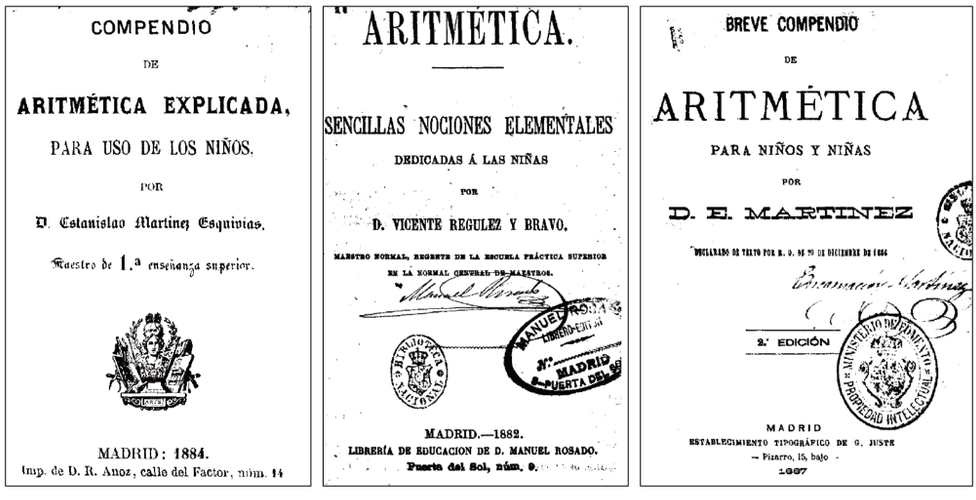
Parece ser que las mujeres debían ser instruidas por separado solo en «las habilidades propias de su sexo». Las niñas, en lo que a matemáticas se refiere, tenían suficiente con saber leer, escribir y contar (no sabemos si esto incluiría las cuatro reglas).

Unos 30 años después, en 1857, se aprobó la *Ley de Instrucción Pública* de 9 de septiembre de 1857 (generalmente denominada Ley Moyano). En este texto se avanzaba ligeramente ya que, por ejemplo, se establecía sobre el papel la obligatoriedad y gratuidad de la primera enseñanza elemental para todos los españoles. No obstante, en los contenidos de la primera enseñanza (tanto elemental como superior) se marcaba ya una clara diferencia entre niños y niñas (ver tabla).

Primera enseñanza elemental	
Niños	*Niñas*
Doctrina sagrada y nociones de historia sagrada acomodadas a los niños	Doctrina sagrada y nociones de historia sagrada acomodadas a las niñas
Lectura	Lectura
Escritura	Escritura
Principios de gramática castellana, con ejercicios de ortografía	Principios de gramática castellana, con ejercicios de ortografía
Principios de aritmética, con el sistema legal de pesas y monedas	Principios de aritmética, con el sistema legal de pesas y monedas
Breves nociones de agricultura, industria y comercio, según las localidades	Labores propias del sexo

Primera enseñanza superior	
Niños	*Niñas*
Ampliación de las materias elementales Principios de geometría, de dibujo lineal y de agrimensura Rudimentos de historia y geografía, especialmente de España Nociones generales de física y de historia natural acomodadas a las necesidades más comunes de la vida	Ampliación de las materias elementales Elementos de dibujo aplicado a las labores propias del sexo Rudimentos de historia y geografía, especialmente de España Ligeras nociones de higiene doméstica

Si se comparan los contenidos de la enseñanza recibida por niños y niñas se observa que se apartaba a las niñas de cuestiones mercantiles e industriales, se sustituía la geometría por el dibujo y se eliminaban los conocimientos científicos relacionados con la física y las ciencias naturales. Estos cambios implicaban que el acceso de las niñas a la segunda enseñanza resultase de facto casi imposible, aunque el texto de la ley no lo impide.



Pese a las diferencias que acabamos de poner de manifiesto, existían también muchas similitudes. Una de ellas se encuentra en los conocimientos aritméticos. La materia correspondiente era la misma para niños y niñas. Después de todo, parecería difícil imaginar que pueda existir una aritmética para niños y una aritmética para niñas.

Sin embargo, en la figura podemos ver las portadas de tres libros publicados en un periodo de 5 años, entre 1882 y 1887. Uno está dirigido a niños, otro a niñas y otro tanto a niños como a niñas. Llama la atención que el libro dedicado a niños y niñas indistintamente está escrito por una mujer: Encarnación Martínez. Los otros dos son obra de autores masculinos, incluso aunque se dirija solo a niñas.

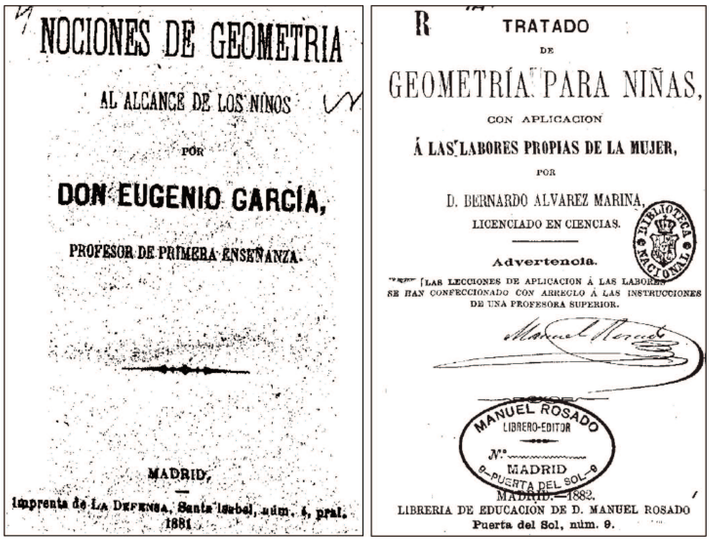
¿Qué sucede con los contenidos de estos tres libros? ¿Acaso se enseña a sumar de manera diferente a niños y niñas? Evidentemente, no. El diablo está en los detalles o, en este caso, en los ejemplos. Así, puede resultar ilustrativo comparar tres fragmentos que hacen referencia al mismo contenido: la definición de «números heterogéneos».

Para niñas	*Para niños*	*Para niños y niñas*
¿Cuáles son heterogéneos? Aquellos en que se consideran especies distintas de unidades, como 6 reales, 4 faldas, 12 corchetes y 40 trencillas.	¿Qué son números heterogéneos? Los que son de distinta especie; como cuatro pesetas, seis corderos, etc.	Números heterogéneos son los que se refieren a unidades diferentes, como tres libros y quince caballos.

La selección de contextos concretos de distinta naturaleza se mantiene a lo largo de los problemas propuestos como ejemplos en las dos primeras obras. Curiosamente, el libro dirigido a niños y niñas no presenta ejemplos ya que, en palabras de la autora: «hemos excluido de nuestro libro los ejemplos y problemas que debe el Profesor presentar». Veamos en paralelo algunos ejemplos correspondientes a problemas de la misma naturaleza.

Para niñas	*Para niños*
¿Cuánto importan 263 trajes a 57 pesetas cada uno? Han de hacerse con 746 metros de tela, delantales de a 3 metros cada uno, y se desea saber cuántos saldrán.	Si una arroba de aceite vale 47 reales, ¿cuánto valdrán 100 arrobas? ¿Cuántos kilogramos de azafrán se podrán comprar con 6 768 pesetas, a 94 pesetas cada uno?

También hemos visto que, en la primera enseñanza superior, se sustituían los «Principios de geometría, de dibujo lineal y de agrimensura» para los niños por unos «Elementos de dibujo aplicado a las labores propias del sexo» en el caso de las niñas. En la práctica, las niñas también recibían enseñanzas de geometría, pero adaptadas a «sus labores».


NOCIONES DE GEOMETRIA

AL ALCANCE DE LOS NIÑOS

POR

DON EUGENIO GARCÍA,

PROFESOR DE PRIMERA ENSEÑANZA.

MADRID,

Imprenta de LA DEFENSA, Santa Isabel, núm. 4, pral.

1881.

R

TRATADO

DE

GEOMETRÍA PARA NIÑAS,

CON APLICACION

Á LAS LABORES PROPIAS DE LA MUJER,

POR

D. BERNARDO ALVAREZ MARINA,

LICENCIADO EN CIENCIAS.

Advertencia.

LAS LECCIONES DE APLICACION Á LAS LABORES SE HAN CONFECCIONADO CON ARREGLO Á LAS INSTRUCCIONES DE UNA PROFESORA SUPERIOR.

BIBLIOTECA NACIONAL

MANUEL ROSADO LIBRERO-EDITOR N.º MADRID 9-PUERTA DEL SOL-9

MADRID.—1882.

LIBRERIA DE EDUCACION DE D. MANUEL ROSADO

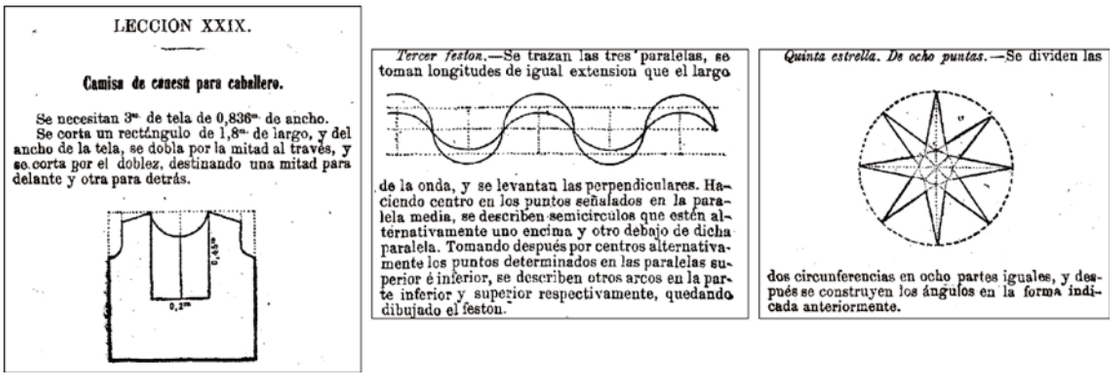
Puerta del Sol, núm. 9.

Resulta muy interesante observar similitudes y diferencias de estas dos obras, si bien resulta difícil valorar hasta qué punto las diferencias provienen de los diferentes destinatarios de los libros. Por ejemplo, el inicio de ambas obras es muy similar. A continuación, transcribimos literalmente las primeras líneas de cada una.

Para niñas	*Para niños*
¿Qué es Geometría? Geometría es la ciencia que trata de las propiedades de la extensión y de su medida ¿Qué se entiende por extensión? Extensión es el espacio ocupado por cualquier cantidad geométrica. ¿Cuáles son las cantidades geométricas? Las cantidades geométricas son el cuerpo geométrico o volumen, la superficie o área y la línea o longitud. ¿Qué es cuerpo geométrico? Cuerpo geométrico o volumen es el espacio ocupado por cualquier cuerpo material.	¿Qué es geometría? La ciencia que trata de la medida de la extensión. ¿Qué es extensión? El espacio que ocupa un cuerpo. ¿Qué es cuerpo en Geometría? Todo aquello que ocupa un lugar en el espacio. ¿Qué son dimensiones? Los diversos sentidos en que es extenso un cuerpo. ¿Cuáles son esas dimensiones? Tres; longitud o largo, latitud o ancho y profundidad o grueso.

Los contenidos geométricos son muy similares en cuanto a extensión. Sin embargo, el libro dirigido a niños hace mucho más énfasis en problemas métricos. Así, mientras el libro para niñas propone solo 5 problemas de cálculo de longitudes, 5 problemas de cálculo de áreas y 6 de cálculo de volúmenes; el libro para niños propone hasta 38 problemas numéricos.

La principal diferencia entre ambos textos está relacionada con las «labores propias de la mujer» a las que se aplica la geometría en el caso de las niñas. Se dedican 11 páginas al corte de prendas y 6 a los bordados, festones y estrellas similares a los que pueden verse en la siguiente figura.



LECCION XXIX.

Camisa de cañesú para caballero.

Se necesitan 3m de tela de 0,836m de ancho. Se corta un rectángulo de 1,8m de largo, y del ancho de la tela, se dobla por la mitad al través, y se corta por el doblez, destinando una mitad para delante y otra para detrás.

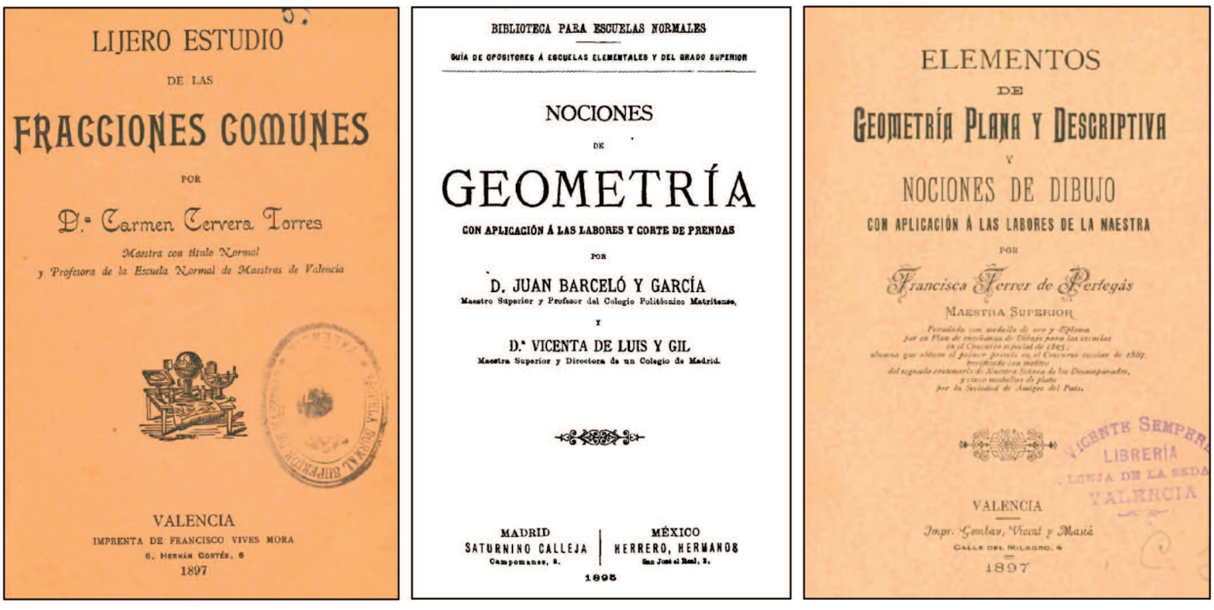
Tercer feston.—Se trazan las tres paralelas, se toman longitudes de igual extension que el largo de la onda, y se levantan las perpendiculares. Haciendo centro en los puntos señalados en la paralela media, se describen semicírculos que estén alternativamente uno encima y otro debajo de dicha paralela. Tomando después por centros alternativamente los puntos determinados en las paralelas superior é inferior, se describen otros arcos en la parte inferior y superior respectivamente, quedando dibujado el feston.

Quinta estrella. De ocho puntas.—Se dividen las dos circunferencias en ocho partes iguales, y después se construyen los ángulos en la forma indicada anteriormente.

Hay que decir, en todo caso, que la aplicación que se hace de la geometría en la segunda parte de la obra es meramente instrumental para describir formas y detallar los pasos según los que realizar algunos diseños geométricos. En ningún momento se aplican explícitamente propiedades geométricas ni se justifican las construcciones en base a ellas.

Volviendo a la Ley Moyano, esta no solo marcaba una distinción por sexos en la formación primaria. También se introducían, como consecuencia, grandes diferencias en los requisitos de formación de maestros y maestras que se mantendrían durante decenios. Muchas de las diferencias eran consecuencia directa de las existentes en la propia enseñanza primaria. Por ejemplo, dado que las maestras solo iban a impartir clases a niñas, no recibían ningún tipo de formación científica. Desde el punto de vista de las matemáticas, además de la situación de la geometría que vuelve a estar vinculada a las labores, el caso más llamativo es la ausencia total de nociones de álgebra en la formación de las maestras.

Todas estas deficiencias en la formación de las mujeres les impedía poder llegar a ejercer como profesoras en las escuelas normales. Es decir, la formación de profesorado, tanto masculino como femenino, recaía exclusivamente en manos de hombres. Este estado de cosas se mantendría hasta prácticamente la entrada del siglo XX, cuando comienzan a aparecer las primeras maestras de escuela normal. En esta situación resulta casi milagroso encontrar ejemplos como los que mostramos, de libros de matemáticas escritos por y para maestras.



LIJERO ESTUDIO
DE LAS
FRACCIONES COMUNES
POR
D.ª Carmen Cervera Torres
Maestra con título Normal
y Profesora de la Escuela Normal de Maestras de Valencia
VALENCIA
IMPRENTA DE FRANCISCO VIVES MORA
6, HERNÁN CORTÉS, 6
1897

BIBLIOTECA PARA ESCUELAS NORMALES
GUÍA DE OPOSITORES Á ESCUELAS ELEMENTALES Y DEL GRADO SUPERIOR
NOCIONES
DE
GEOMETRÍA
CON APLICACIÓN Á LAS LABORES Y CORTE DE PRENDAS
POR
D. JUAN BARCELÓ Y GARCÍA
Maestro Superior y Profesor del Colegio Politécnico Matritense,
Y
D.ª VICENTA DE LUIS Y GIL
Maestra Superior y Directora de un Colegio de Madrid.
MADRID
SATURNINO CALLEJA
Campomanes, 8.
MÉXICO
HERRERO, HERMANOS
San José el Real, 3.
1895

ELEMENTOS
DE
GEOMETRÍA PLANA Y DESCRIPTIVA
Y
NOCIONES DE DIBUJO
CON APLICACIÓN Á LAS LABORES DE LA MAESTRA
POR
Francisca Ferrer de Perfegás
MAESTRA SUPERIOR
VICENTE SEMPERE
LIBRERÍA
LONJA DE LA SEDA
VALENCIA
VALENCIA
Impr. Gombau, Vicent y Masiá
CALLE DEL MILAGRO, 4
1897

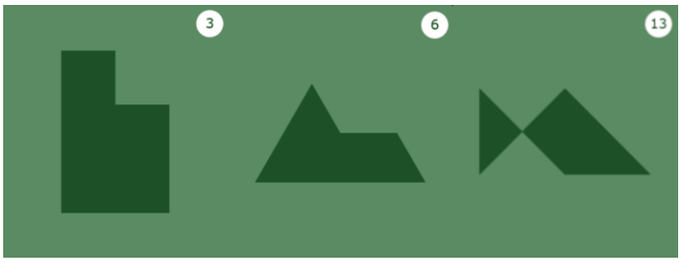
Aunque seguramente quede aún mucho por avanzar, solo nos queda alegrarnos de que ese contexto forme ya parte de la historia. Sin embargo, recordando los ejemplos de los libros de texto presentados anteriormente, hemos de tener bien presente que ni siquiera las matemáticas están exentas de ideología y que, más allá de los contenidos concretos, los ejemplos, contextos y situaciones que elegimos pueden tener un gran impacto sobre las concepciones que transmitimos a los estudiantes acerca de ellas.

Reptiles

por
Pedro Latorre García
(CPEPA Gómez Lafuente, Zaragoza)

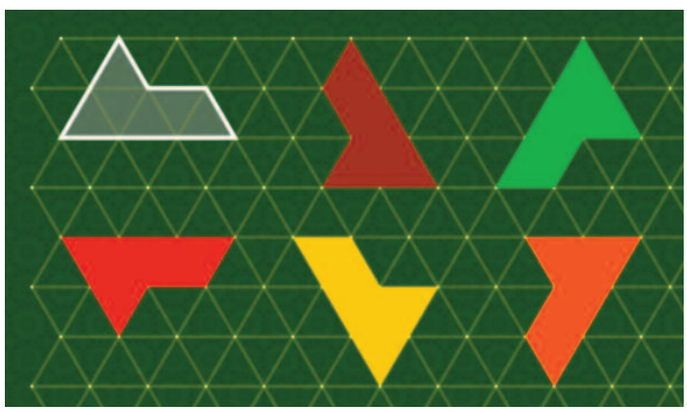
Un reptil, en inglés *reptile* (*tile* significa tesela o baldosa), es una figura que se puede «replicar», es decir se puede dividir en piezas iguales con igual forma que la original, lógicamente más pequeñas y que pueden estar en distintas posiciones. El nombre fue acuñado en 1962 por Solomon W. Golomb cuando trabajaba en el Jet Propulsion Laboratory del California Institute of Technology y popularizado por Martin Gardner en su columna «Juegos matemáticos», publicada en la revista *Scientific American*. También he visto traducido el término al español como *repitetesela*, el cual es más literal, pero me gusta menos. Si no se obliga a que las teselas sean del mismo tamaño, las figuras obtenidas se llaman *irreptiles*. En la figura se muestra un *irreptil* formado por polidiamantes.

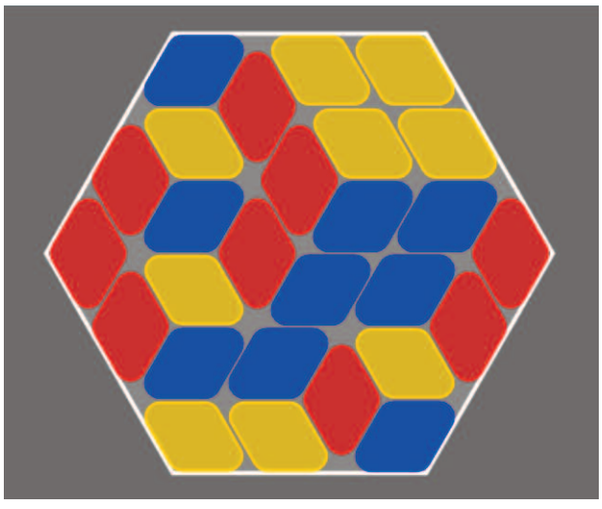
Obviamente, debido a su definición, los reptiles son buenos candidatos para realizar los clásicos puzles de cubrimiento con formas menos convencionales. La aplicación que he desarrollado puede complementarse con la actividad «Reptiles» de la exposición Cuadrando Ideas.



Los polígonos utilizados en el juego son poliominós, polidiamantes y poliábolos. Los primeros se construyen uniendo cuadrados por sus aristas, los segundos juntando triángulos equiláteros por un lado y los terceros pegando triángulos rectángulos isósceles. Queda una última clase de figuras, los *polydrafter* (sin traducción al español) que se obtienen juntando triángulos rectángulos de 30º–60º–90º, es decir mitades de triángulos equiláteros.

Los polidiamantes, al igual que los poliominós, son un excelente recurso para explorar los movimientos en el plano. Nos sirven como excusa para utilizar una retícula triangular, en lugar de la habitual cuadrícula. Un ejercicio típico consiste en encontrar los diferentes polidiamantes con un número dado de triángulos. Una vez hallados, hay que dibujarlos en todas las orientaciones posibles en una malla triangular. Contamos con 1 diamante (mejor que didiamante), 1 tridiamante, 3 tetradiamantes, 3 pentadiamantes y 12 hexadiamantes. Llamemos $P(n)$ al número de polígonos de esta clase construidos con n celdas, considerando distintos aquellos que tengan orientaciones diferentes. No se conoce una fórmula general que determine $P(n)$. Se estima que $P(n) \sim \lambda^n$, con $2{,}84 < \lambda < 3{,}6$. En el año 2011 se calculó el valor exacto de $P(32) \sim 6{,}7 \times 10^{13}$. Para más información puede consultarse la Wikipedia.



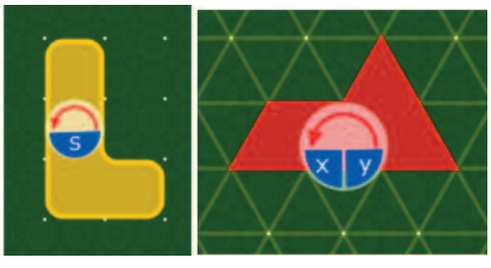


El problema del *calisson* puede servir de inspiración para realizar variadas actividades. Un *calisson* es un dulce tradicional francés parecido al mazapán, con forma de diamante. Supongamos que haya de tres sabores, cada uno con un envoltorio de distinto color y los queramos empaquetar en una caja con forma de hexágono regular. Si los del mismo color están colocados en una misma orientación, ¿cuántos dulces de cada color podemos encontrar en una caja? Este problema tiene su origen en el artículo de Guy David y Carlos Tomei «The problem of the calissons». Los autores demuestran que siempre debe haber el mismo número de dulces de cada color. Enlace a un artículo de divulgación.

La aplicación «Reptiles» consta de 16 niveles. Los puzles tienen 4 o 9 piezas y me parecen un recurso adecuado para alumnos de cualquier nivel, desde educación primaria hasta primer ciclo de secundaria. En general son fáciles de resolver y a la vez su manipulación resulta muy satisfactoria.

En la resolución de estos puzles se utiliza una forma muy simplificada del cálculo, en el sentido que se le da en ajedrez. Se observa que algunas piezas impiden o bloquean la colocación de las siguientes y por lo tanto hay que trasladarlas, rotarlas o aplicarles alguna simetría para continuar. Recomiendo encarecidamente que se use un juego físico para resolver los puzles y de esta forma minimizar el tiempo de exposición a la pantalla.

El manejo del juego es muy intuitivo. Para seleccionar un polígono pasamos el cursor o presionamos sobre la misma en una tableta. Una vez elegida se distinguen tres casos:



— Si su forma no cambia ni por giros ni simetrías, podremos moverla presionando y arrastrando dentro de la pieza. Al dejar de apretar, la pieza se quedará en la nueva posición si no está ocupada por otra.
— Si su forma cambia al girarla, aparece un dial de forma circular. Presionando sobre el mismo haremos una rotación de 120º en el sentido antihorario con respecto al centro del dial. Presionando y arrastrando dentro de la pieza, pero fuera del dial, moveremos la pieza.
—Si su forma cambia por giros y simetrías, aparece un dial dividido en dos semicírculos. La parte superior sirve para girarla. En la parte inferior hay o bien una letra S, para hacer la simetría vertical, o una letra X y otra Y para las simetrías horizontal y vertical. Al pulsar, se realizará la reflexión según un eje que pasa por el centro del dial, horizontal o verticalmente. Para moverlas se procede como en el caso anterior.

Los poliominós se mueven en una retícula cuadrada y solo son necesarias las simetrías con respecto a un eje, horizontal o vertical, para obtener todas las formas del polígono sobre la cuadrícula. Los polidiamantes se desplazan en una retícula triangular y en algunos casos para llevarlos desde una orientación a otra, hace falta realizar dos simetrías de ejes perpendiculares.

Estrellas tetraédricas. Tejiendo entre vértices y aristas

por
Carolina Rueda Pérez
(IES Martínez Vargas, Barbastro)

Una de las cosas que más me gusta de enseñar es tener el poder de generar intriga que derive en asombro y descubrimiento. Es una sensación que me satisface mucho y consigue que me siga entusiasmando ofrecer estas emociones a nuestro alumnado. Hace ya unos años que llevé al aula por primera vez la propuesta didáctica que os voy a compartir a continuación. Para entonces solo la trabajé como un taller, con el que quería mostrar al alumnado que podemos hacer matemáticas con cualquier objeto cotidiano que tuviéramos a nuestro alcance. Entonces era mi primer año como docente y tuve la suerte de iniciarme junto a un gran compañero, Daniel Cejalvo, quien me dio rienda suelta para crear con mis alumnos y alumnas. Al poco tiempo de empezar el curso nos concedieron el programa Conexión Matemática ofrecido por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas (SAPM), en colaboración con el Departamento de Educación del Gobierno de Aragón. Entonces me pareció que mi taller sería una actividad atractiva en dicho contexto. El tiempo ha pasado y esa actividad puntual se ha convertido en una propuesta didáctica que articula varias situaciones de aprendizaje, en la que podemos trabajar muchos aspectos de la geometría de muchas maneras posibles, y es así como hoy os la vengo a presentar.

Algunos de los objetivos que pretendo conseguir con el taller son pasar del plano al espacio, mediante la manipulación y actividades de creación, trabajando en grupo, tomando decisiones, proponiendo problemas en los que invitamos al descubrimiento y haciendo uso significativo de lo digital. Espero que a muchos de vosotros os inspire y os ayude a enseñar las matemáticas como más nos gustan a nosotros y a ellos, creando.

A continuación presento la actividad, el material necesario para su realización, cómo están divididas las diferentes sesiones, cómo lo trabajo en el aula para dar respuesta a las competencias específicas y los saberes básicos que se desean conseguir, todo ello adaptándolo en la medida de lo posible a la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE), de 29 de diciembre, por la que se modifica la actual Ley Orgánica 2/2006 (LOE), de 3 de mayo, de Educación.

La geometría

Según el diccionario de la Real Academia Española, geometría se define como:

> Estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio.
>
> — Geometría algorítmica: Aplicación del álgebra a la geometría para resolver por medio del cálculo ciertos problemas de la extensión.
> — Geometría analítica: Estudio de figuras que utiliza un sistema de coordenadas y los métodos del análisis matemático.
> — Geometría del espacio: Parte de la geometría que considera las figuras cuyos puntos no están todos en un mismo plano.
> — Geometría descriptiva: Parte de las matemáticas que tiene por objeto resolver los problemas de la geometría del espacio por medio de operaciones efectuadas en un plano y representar en él las figuras de los sólidos.
> — Geometría plana: Parte de la geometría que considera las figuras cuyos puntos están todos en un plano.
> — Geometría proyectiva: Rama de la geometría que trata de las proyecciones de las figuras sobre un plano.

¿Cuánto juego nos da esta rama de las matemáticas? Empezando por los puntos, que se unen infinitamente y dan lugar a formas maravillosas; pasando por las líneas que al unirse por un punto forman vértices y con ellos ángulos; y si cerramos, planos; y si… Y así vamos creando formas y volúmenes.

Las actividades que se presentan responden a todas las definiciones mencionadas con anterioridad, secuenciado en varias situaciones de aprendizaje, en la que pasaremos por la visualización, el reconocimiento, el análisis, la or-

denación y clasificación, acabando en una deducción formal. Se ajustan así al modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele junto con el de VAK (Valenzuela, 2020). El primer modelo hace referencia a las fases planteadas por Van Hiele (1986) para desarrollar cada nivel de razonamiento, en su teoría para la didáctica de la geometría; la segunda son los estilos de aprendizaje propuestos en el modelo VAK de programación neurolingüística de Bandler y Grinder (1975).

Material necesario para la actividad

— Palos de madera, de diferentes o iguales longitudes.
— Gomas elásticas.
— Ovillos de lana.
— Papel y lápiz.
— Ordenadores.

Sesiones

La actividad está dividida en varias sesiones, ampliables cada una de ellas dependiendo de los objetivos que queramos alcanzar. Está dirigida a 2.º de ESO, pero se puede comenzar a trabajar en 1.º de ESO.

1.ª sesión

Comenzamos la actividad presentando al alumnado los palos de madera. Desde este primer momento vamos a utilizar un vocabulario geométrico, así que los palos los llamaremos aristas, podemos aprovechar para repasar otros conceptos básicos como longitud, vértice, puntos, caras, área, perímetro, todo enfocado al plano.

En ocasiones presento diferentes longitudes de aristas, y sin que el alumnado sepa qué vamos hacer con ellas, les pido que se levanten y cojan 6 del tamaño que más les guste, de esta forma podremos realizar parejas aleatoriamente, y reparto unas cuantas gomitas indicándoles que estas gomitas formarán vértices.

En un primer momento y de forma individual, cada uno tendrá que formar un triángulo, un cuadrado, un pentágono, un hexágono, etc. Podemos detenernos aquí todo lo que consideremos oportuno. Fomentaremos que apunten en una hoja todo lo que sea relevante para ellos, ya que es aquí cuando empezamos a descubrir y repasar conocimientos ya trabajados en Primaria. A partir de este momento, empezamos a formar conjeturas, estudiar relaciones y propiedades matemáticas. También podemos aprovechar para explicar el teorema de Pick, ya sea con lápiz y papel de tramas, o con GeoGebra. Este teorema es muy sencillo de aplicar y resulta muy intuitivo a la vez que interesante.

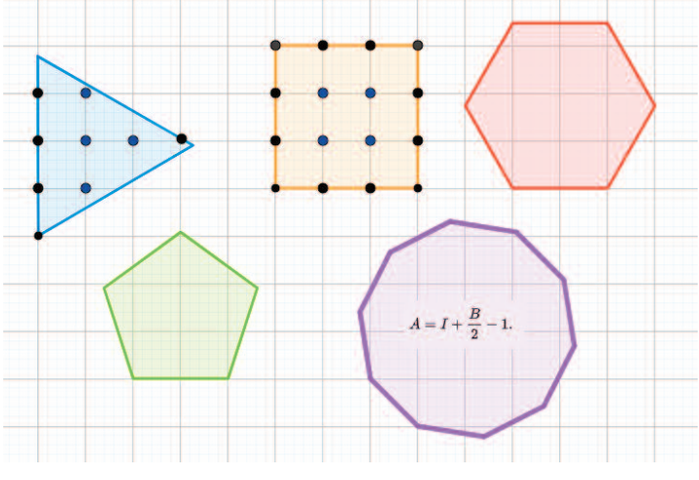


Figura 1. Polígonos regulares

En esta primera imagen podemos ver figuras realizadas con GeoGebra, para aplicar el teorema de Pick, el alumnado solo tiene que contar los puntos que quedan en el interior de la figura y sumarles la mitad de los que están en los bordes; al restar uno, obtienen el área de la figura representada. Es buen momento para comparar los resultados obtenidos con los que nos ofrecen las fórmulas más tradicionales, suelen quedar muy sorprendidos/as con esta actividad.

En esta primera sesión el objetivo principal es trabajar el sentido de la medida, a través de la experimentación, la manipulación y la visualización de objetos geométricos, construyendo figuras que nos ofrezcan la oportunidad de profundizar en conceptos básicos sobre las mismas.

2.ª sesión

Partiendo de la sesión anterior presentaremos un poliedro regular, el tetraedro, mencionaremos a Platón e invitaremos al alumnado a investigar en casa sobre el autor y los sólidos platónicos. Nos paseamos un poco por la historia de las matemáticas. A partir de aquí comienza nuestro reto, que consiste en montar un tetraedro (figura 2).

Para facilitar la construcción del tetraedro (figura 2) podemos ayudarnos nuevamente con GeoGebra, y presentarles dicha figura junto con su desarrollo (figura 3).

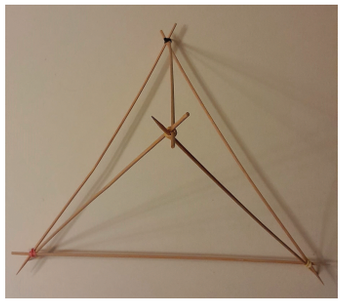


Figura 2. Tetraedro montado con palos de madera y gomas

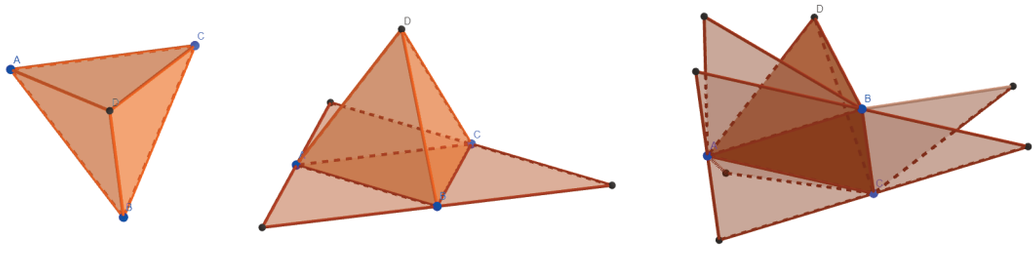


Figura 3. Desarrollo del tetraedro (Esta imagen ha sido creada con GeoGebra, que en su hoja de cálculo 3D ofrece un comando que recrea la animación del desarrollo de cualquier sólido)

Se trata de que con sus seis varillas de madera, aristas, consigan crear un tetraedro. Al principio se vuelven un poco «locos» y muy pocos llegan a crearlo, pero podemos ayudarles:

Primero cogemos tres palos a la vez, los atamos por uno de los vértices, luego unimos otros dos que ataremos en el vértice contrario junto con dos de las aristas ya atadas, y cuando obtengamos un cabestrillo, es decir de una única arista saldrán dos nuevas aristas por cada vértice, ataremos la sexta arista dando lugar a un tetraedro como se muestra luego en las imágenes. Es importante que estén fuertemente atadas, y a un par de centímetros del vértice, ya que más adelante lo manipularemos y si se sueltan los vértices damos lugar a la frustración.

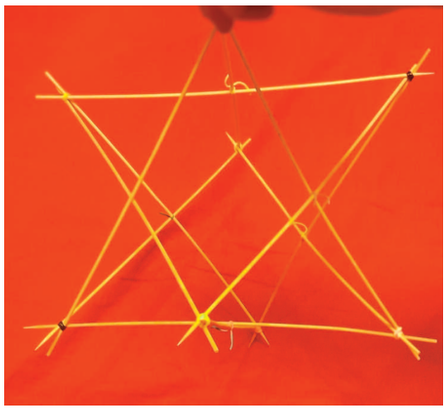


Figura 4. Estrella tetraédrica (Estrella creada con palos y gomas por la intersección de dos tetraedros)

Una vez que tengamos montado nuestro tetraedro, pedimos que se pongan por parejas, la pareja ha de tener una figura con las mismas longitudes, y juntos han de averiguar cómo podríamos montar una estrella con los dos tetraedros (figura 4).

En este punto la gran mayoría de las veces necesitan ayuda, han de saber que uno de los tetraedros ha de estar unido por todos sus vértices y el otro tendrá un vértice sin atar, de forma que cada una de las aristas entrará por cada una de las caras del otro tetraedro y saldrá por la cuarta cara donde uniremos las aristsa. Una vez así, ataremos las intersecciones de las aristas dando lugar a la estrella.

Durante esta sesión se plantean preguntas como estas:

— ¿Cuántas caras tiene un tetraedro?
— Número de aristas, vértices… Explicar el teorema de Euler. Comprobar que se cumple.
— Cuál sería el área de la figura, cómo podríamos hallarla de forma rápida, recordar los tipos de triángulos y ver qué propiedades tiene el que estamos trabajando.
— ¿Cuántos vértices tendrá nuestra estrella tetraédrica?
— ¿Qué propiedades tiene esta figura?

Es fácil desde este punto trabajar el sentido espacial, desde lo concreto a lo visual, cuando el alumnado manipula abre su curiosidad, se concibe el aprendizaje de las matemáticas como algo divertido, lo cual ayuda mucho a desarrollar positivamente el sentido socioafectivo, trabajan la perseverancia, la superación de bloqueos, se plantean preguntas y buscan respuestas, al hacerlo por parejas se abren al debate, a tomar decisiones conjuntamente, interactúan y conversan entre iguales. Todas las veces que he realizado esta sesión han aparecido preguntas diferentes y el alumnado me ha sorprendido con aportaciones muy creativas.

3.ª sesión

Durante esta sesión vamos a trabajar la visualización, el razonamiento y la modelización geométrica. Como comenté al principio las situaciones de aprendizaje descritas en las diferentes sesiones, responden al modelo de Van Hiele (Vargas y Araya, 2013), como ejemplo voy a contextualizar la siguiente.

— Introducción: vamos a presentar la estrella tetraédrica montada el día anterior, recordando brevemente contenidos de las sesiones anteriores que sean relevantes, es el momento de preguntar a nuestro alumnado sobre sus indagaciones en la historia de los sólidos platónicos.
— Orientación guiada: comentaremos que el objetivo de esta sesión es que tienen que averiguar cuántas figuras planas podemos extraer, a través de lanas, uniendo vértices o intersecciones de la estrella
— Explicitación: la actividad se realizará por parejas, deben apuntar en una hoja el tipo de figura que obtienen con el color de lana usado y las características que cumple dicha figura (número de vértices, aristas, tipo de triángulo o cuadrilátero, si hay otras figuras diferentes…).
— Orientación libre: ahora cada pareja debe descubrir cuántas figuras semejantes a las anteriores pueden encontrar y anotarlas.
— Integración: invitarles a elaborar una lista con todo lo descubierto e indagar sobre si existe para ellos una regla a seguir para obtener de manera automática el número de figuras de cada tipo.

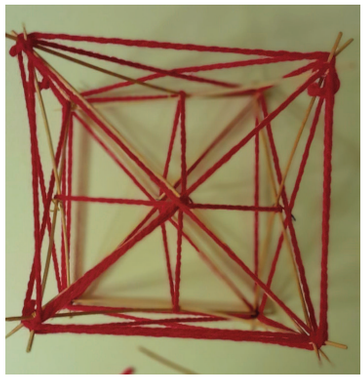


Figura 5. Cuadrados

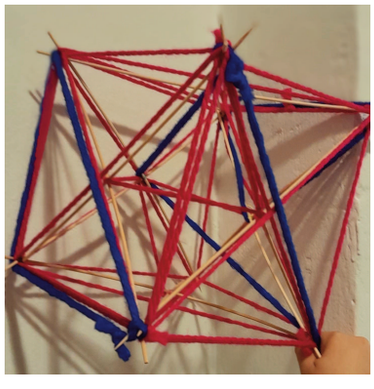


Figura 6. Triángulos

Esta actividad se puede adaptar a todo tipo de alumnado, responde a la diversidad, ofreciendo reflexiones más o menos exigentes dependiendo de los objetivos que se pretendan abordar con cada alumno/a. Por parte del pro-

fesorado es el momento de observar, anotar la evolución del alumnado, hasta dónde consigue llegar, cuáles son sus reacciones, cómo interpreta, cómo se expresa, etc. Es interesante atender a las preguntas y respuestas que van apareciendo a lo largo de la actividad.

4.ª sesión

En esta sesión presentaremos formalmente los cinco sólidos platónicos, hablaremos de volúmenes y capacidades, introduciremos las pirámides, los conceptos básicos que la acompañan, es nuevamente un buen momento para trabajar con GeoGebra todos estos conceptos.

En GeoGebra si nos vamos a la vista 3D, hay una pestaña que nos presenta pirámides con las alturas o bases que queramos, los diferentes sólidos platónicos y sus desarrollos. Si previamente hemos trabajado con GeoGebra en la primera sesión, podemos descubrir estas nuevas formaciones que nos ofrece el programa.

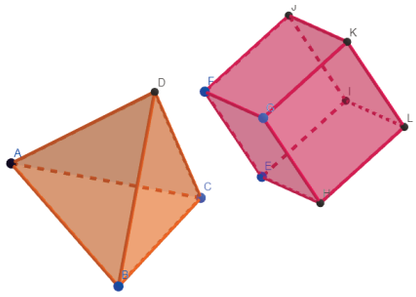


Figura 7. Tetraedro y cubo

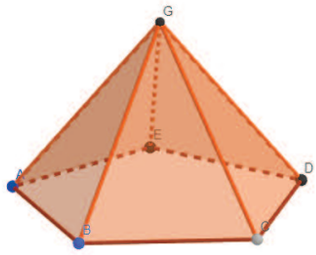


Figura 8. Pirámide

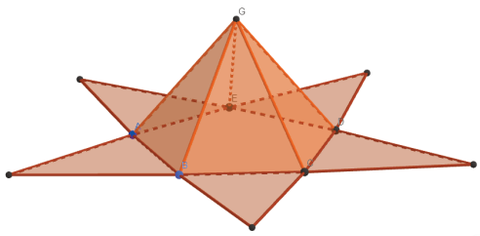


Figura 9. Desarrollo pirámide

Y comenzamos a montar estrellas partiendo de los sólidos platónicos. Para ello necesitamos imprimir el desarrollo de cada uno en un folio o cartulina para cada cara del poliedro regular, y todas las pirámides necesarias. Aquí podemos preguntar:

— ¿Cuántos folios necesito para cada figura?
— ¿Y para cada pirámide?
— ¿Qué área tiene cada figura? ¿Volumen?
— ¿Y la estrella en su conjunto?

Así en esta sesión haremos un recuento con el alumnado de todo el material necesario. En ocasiones he tenido la ayuda del departamento de dibujo, que han aprovechado para repasar conceptos de dibujo técnico, han creado dichas impresiones y han pegado los desarrollos de las figuras, dando diferentes texturas a las estrellas y haciendo creaciones muy mágicas. Esta es una actividad donde la creatividad sorprende, es un momento perfecto para dejar la imaginación actuar. De manera sencilla podemos obtener resultados como los que se muestran en la figura 10

Figura 10. Estrellas con poliedros regulares y pirámides

Merece la pena apuntar que todas las sesiones propuestas pueden llevar más de un día en realizarse. Todo dependerá de lo que queramos detenernos, del ritmo del alumnado y de las propuestas que les hagamos. En este sentido son muy versátiles. Personalmente las he llevado así al aula, pero cada año y con cada grupo ha sido diferente. Eso sí, todas las veces han sido igualmente sorprendentes.

Ejemplificación de situación de aprendizaje

Desde que ha entrado en vigor la LOMLOE son muchas las veces que en el departamento nos hemos preguntado si esto sería una situación de aprendizaje o si lo estamos haciendo bien. Estoy segura de que muchos de los docentes que damos esta materia en secundaria y bachillerato nos formulamos este tipo de preguntas. Para mí ha sido todo un descubrimiento leer y entender que esta propuesta corresponde a una situación de aprendizaje.

Las actividades presentadas persiguen ese objetivo, descubrir que detrás de muchas de las actividades que el profesorado lleva realizando desde hace tiempo hay una situación de aprendizaje, y que a través de lo manipulativo, y gracias a programas informáticos como GeoGebra, se puede facilitar y profundizar de una manera diferente en conceptos matemáticos que facilitan, y mucho, el aprendizaje a nuestro alumnado.

Con las actividades presentadas trabajamos todas las competencias específicas de la materia: la resolución de problemas cuando han de responder a los retos propuestos, el razonamiento al pensar cómo hacer cada una de las composiciones, la conexión cuando se dan cuenta de cómo a partir de una arista consiguen figuras tan complejas. Además comunican y representan usando recursos manipulativos, dibujando representaciones más complejas con GeoGebra, desarrollan positivamente sus destrezas socioafectivas hacia la materia con sus compañeros/as y hacia el profesor/a.

Y todo ello promovido por los saberes básicos, aquellos sentidos que trabajamos sin darnos cuenta diariamente. El sentido numérico, contando y enumerando las diferentes figuras que salían al unir vértices a través de las lanas. El sentido de la medida, estimando y prediciendo por ejemplo la obtención de figuras semejantes. El sentido más trabajado durante estas actividades, el espacial, con el que vemos la geometría desde una perspectiva amigable y satisfactoria. El algebraico, cuando intentamos formular cómo obtener todas las figuras planas o al utilizar los teoremas de Euler o Pick para hallar diferentes conceptos. El estocástico, aunque en menor medida, pero está presente al analizar y representar los datos que vamos obteniendo. Y el socioafectivo, generando una actitud positiva, trabajando la frustración, desarrollando habilidades y destrezas que nos facilitarán mucho el conocimiento y la comunicación. Todo ello, atendiendo a la diversidad, pasando por la historia de las matemáticas y sin olvidar lo divertido que es ir a clase cuando se proponen actividades de este tipo. Y si alguien se pregunta si es posible que funcione, doy fe de que sí, y os animo a probar.

Referencias bibliográficas

VALENZUELA, J. E. (2020), *Enseñanza a partir de la teoría de Van Hiele y el modelo VAK: La teoría de Van Hiele y el modelo VAK como base de la enseñanza de la Geometría*, Editorial Académica Española, México.

VARGAS, G. V., y R. G. ARAYA (2013), «El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la Geometría», *Uniciencia* Vol. 27, N.º1 , 74-94.

La tecla rota, creamos una actividad rica. Codocencia

por
José Luis Fernández Giménez y Belén Martínez Pérez
(IES Río Gállego, Zaragoza)

A partir de 2.º curso de la ESO, el uso de la calculadora es cada vez más frecuente. La actividad tecla rota pretende fomentar su uso eficiente. La calculadora es la protagonista y toda la actividad gira en torno a ella.

Para conseguirlo, hemos diseñado una actividad rica, con ejercicios de dificultad variada y de respuesta abierta. El reto consistía en animar al alumnado a investigar sobre las ventajas del uso de una calculadora científica frente a cualquier calculadora convencional. Sin embargo, es tal la cantidad de destrezas que moviliza esta actividad, que puede enfocarse como una situación de aprendizaje en la que la ausencia de un elemento (una tecla se ha roto) desemboca en el despliegue de varios saberes referidos al sentido numérico y al socioafectivo. A través de la resolución de problemas/retos, aprenderán la sintaxis propia de su calculadora científica mientras se refuerzan los saberes descritos.

Otra cuestión que deseamos destacar, es la sencillez del planteamiento. Un enunciado breve y fácil de entender, siempre resulta atractivo para nuestro alumnado y permite que se enganchen a la actividad desde el primer momento. La resolución requiere aplicar estrategias más o menos sencillas, por lo que el ritmo de la clase es fluido. También se fomenta la autonomía de los estudiantes.

Creemos que es importante compartir esta experiencia en el aula, no solo por la actividad en sí misma, sino por lo que ha significado para nosotros. Cuando diseñas una actividad así y la llevas al aula, comprendes que hay más formas de enseñar matemáticas y que si el alumnado despliega sus destrezas para conseguir un reto, adquiere conocimientos mucho más duraderos. El trabajo de reinventar una tarea haciéndola más rica y accesible a todo el alumnado, ha resultado más gratificante de lo que imaginábamos, por eso nos complace mostrarlo por si puede animar a otras a personas a crear sus propias actividades.

Otro aspecto que queremos destacar, es cómo la codocencia ha transformado nuestra forma de enseñar matemáticas. La características del grupo y la organización del aula, serán descritas en el siguiente apartado pero nos gustaría transmitir (sobre todo) las ventajas y los inconvenientes (pocos) de compartir el espacio de clase.

Contexto del grupo y características del alumnado

Por necesidades de espacio en el centro, decidimos unir los dos grupos de Taller de Matemáticas de segundo en la misma aula. Esta circunstancia ha supuesto una gran oportunidad para compartir tareas y la gestión de aula está resultando bastante más llevadera.

El grupo lo forman veintitrés alumnos con perfiles muy variados:

— Desmotivación total hacia la asignatura de casi todos.
— Problemas de disciplina en algunos casos bastante severos.
— Riesgo alto de abandono del sistema educativo.
— Varios de ellos con déficit de atención diagnosticado.

Queremos destacar las ventajas e inconvenientes de gestionar el aula de esta manera.

Ventajas	*Inconvenientes*
Atención a la diversidad. Aprendizaje mutuo. La interacción entre los docentes hace más dinámica la clase lo que incide de forma directa en la atención del alumnado. El trabajo de buscar y diseñar se reduce a la mitad, esto nos permite utilizar material más rico. Gestión de conflictos, en este caso no son pocos.	Puede parecer un derroche de horas. Es necesario compartir ideas acerca de la enseñanza. Alguna vez el alumnado recibe instrucciones contradictorias.

No todos los días logramos el clima más adecuado, pero hemos conseguido que trabajen a buen ritmo hasta el momento. Es necesario combinar muchos tipos de tareas para que se sorprendan. Destacamos:

— Actividades de Nrich.
— Desmos (colección de Lola Morales).
— Plickers con preguntas del Canguro Matemático.
— Tareas manipulativas como origami, policubos, puzles, etc.
— Alguna ficha con problemas (para subir nota).
— Material de Ana García Azcárate, entre otras.

En clase trabajamos en grupos, se colocan ellos como quieren (incluso solos si les apetece) aunque, casi siempre, se unen a un grupo a lo largo de la sesión.

La actividad principal de esta comunicación es de creación propia y fue llevada al aula por un total de cuatro sesiones. Ha sido revisada y mejorada para seguir utilizándola y adaptándola a otros cursos o grupos.

Diseño de la actividad

El diseño tiene la estructura del modelo general descrito en las sugerencias didácticas para el diseño de situaciones de aprendizaje (apartado IV 3) de la Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto.

<table>
<tr><th colspan="2">Resumen de las fases del proceso</th></tr>
<tr><td colspan="2">Primera fase: Se observa el conocimiento previo. Se hace una actividad inicial que situará a todo el alumnado en el mismo punto de partida. Hay puesta en común tras esta primera fase.</td></tr>
<tr><td>Segunda fase: Tareas breves y variadas, el alumnado comienza a investigar. No hay exposición previa más allá de las conclusiones surgidas de la actividad inicial.</td><td rowspan="2">Tercera fase: Simultáneamente al desarrollo de la actividad (segunda y cuarta fase), se realizan puestas en común en cualquier momento y se van dando pistas a través de preguntas que reconduzcan su investigación.</td></tr>
<tr><td>Cuarta fase: Las tareas de esta fase son más complejas que en la segunda. Deberán combinar lo aprendido y explorar nuevos caminos. En esta fase se atiende de manera directa a la inclusión. Está constituida por cuestiones que, al igual que las anteriores, permiten diferentes caminos para su resolución, exigen reflexiones más profundas y dan la oportunidad de llegar al techo alto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Quinta fase: Esta fase se compone de intervenciones por parte del alumnado y del docente que es quien debe dirigir el debate y dar el feedback necesario para garantizar la adquisición de las competencias específicas. Es muy importante finalizar esta fase, especialmente con las actividades de la fase 2 (las de la fase cuatro pueden ser de dificultad muy elevada).</td></tr>
</table>

Vinculación con los elementos del currículo

No pretendemos dar una relación exhaustiva de los diferentes elementos del currículo pero cabe destacar la adecuación de la actividad al texto de la LOMLOE.

Saberes básicos	*Competencias específicas*	*Criterios de evaluación*
A. Sentido numérico A.3. Sentido de las operaciones: — Cálculo mental y operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales. — Relaciones inversas, efecto de las operaciones aritméticas. — Propiedades de las operaciones, cálculos de manera eficiente. **F. Sentido socioafectivo** F.1. Creencias, actitudes y emociones: — Apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje. F.2. Trabajo en equipo, toma de decisiones, inclusión, respeto y diversidad: — Técnicas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.	CE.M.1 (Resolución de problemas)	1.3
	CE.M.4 (Modelos matemáticos)	4.2
	CE.M.8 .(Comunicación)	8.1
	CE.M.9 CE.M.10 (Socioafectivas)	9.1 10.1

La actividad

En la página siguiente presentamos el material en su formato definitivo, aunque es importante destacar que tras dos sesiones, se revisó y se modificó para subsanar alguna deficiencia que detectamos.

La tecla rota

Actividad inicial

Seguramente tu calculadora científica se parece mucho a alguna de estas:

Intenta averiguar para qué sirven las teclas que hemos marcado.
… Pregunta si lo necesitas, pero no realices la siguiente actividad hasta que no lo sepas seguro.

Ahora realiza las siguientes operaciones en un solo paso. Es decir, solo puedes utilizar una vez.

a) $23\cdot(5+3\cdot121)-(13+29)\cdot19=$
b) $-25+(-79)-(-15)+72=$
c) $2{,}75-1{,}037\cdot5{,}778=$
d) $4^5\cdot(-2)^3=$

Actividades

Supongamos que en tu calculadora falta alguna tecla. ¿Serás capaz de hacer las siguientes operaciones? Puedes utilizar el cálculo mental (es decir, sin papel)

1. Opera sin utilizar la tecla [6]: $1\,256\cdot16=$
2. Divide sin utilizar la tecla [0]: $6\,041\,350\div1\,025=$
3. Suma sin utilizar la tecla [+]: $326\,598\,496+159\,867\,789=$
4. Multiplica sin utilizar la tecla [×]: $9\,999\cdot998=$
5. Opera sin utilizar la tecla [·]: $37{,}566\,628\,778+345{,}244\,132\,7=$
   $2{,}73\cdot16{,}27+3{,}528=$

Ahora no puedes utilizar ni la tecla [+] ni la la tecla [−].

6. Opera sin utilizar la tecla [7]: $(7)^5\cdot(-3)^5=$
   $(2)^{17}=$
   $(-2)^7\cdot(2)^9=$
7. Divide sin utilizar la tecla [5]: $555\,555\div15=$

Reto1

¿Eres capaz de hacer cada operación utilizando la tecla [=] solo una vez? (Es decir, en un solo paso)

Reto 2

Realiza las siguientes operaciones utilizando, de las cifras, solo la tecla [3]:

a) $6\,666\cdot666=$
b) $-9^4=$
c) $12\cdot27=$

Metodología

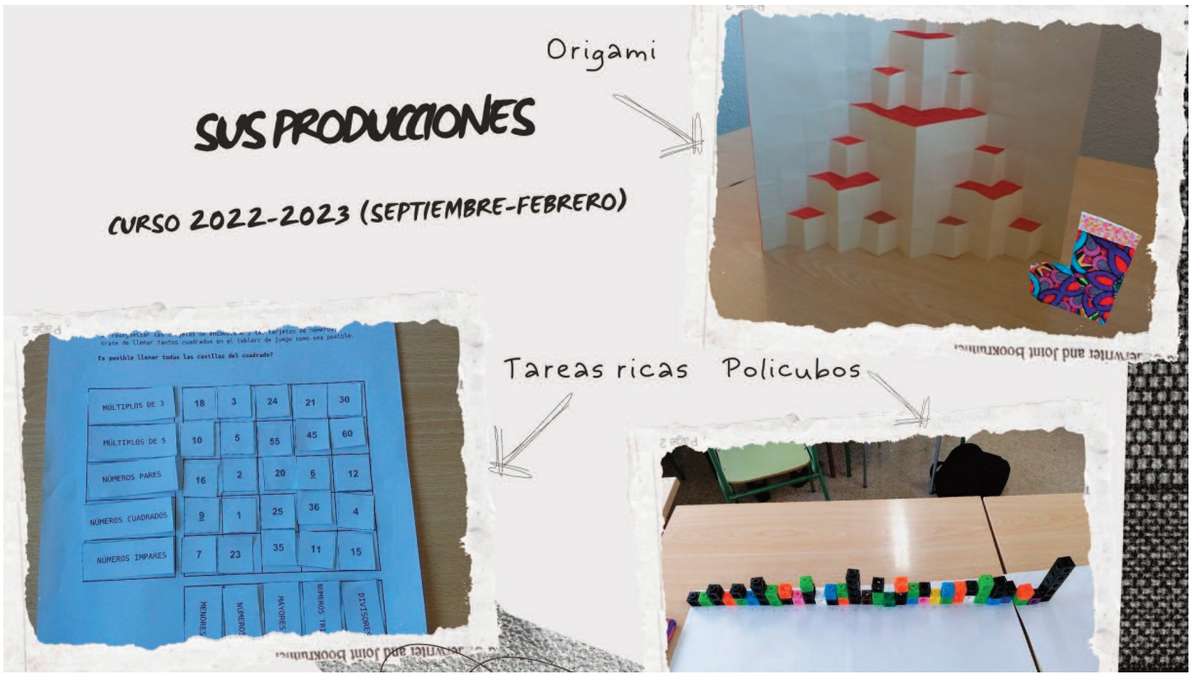
Además de la metodología y la disposición habitual del aula: trabajo en pequeño grupo e indagación guiada a través de preguntas o pistas, en esta actividad realizamos la puesta en común disponiendo al alumnado en forma de «U». Se pretendía con ello crear un ambiente de diálogo, fomentando la comunicación y la exposición en lenguaje matemático. Aunque, en principio, los alumnos no se mostraron proclives a esa disposición, conforme avanzaba la sesión se fue confirmando su efectividad en la comunicación entre alumnos.

Con la calculadora de Desmos proyectada, se presentaron, una por una, las actividades de la tarea. Para cada una de ellas se siguió un procedimiento similar:

— Se comienza dando la intervención a algún grupo cuya estrategia no sea correcta (si la ha habido) y se pregunta a la clase su opinión sobre ella. En este momento es muy importante no recalcar el error sino potenciar la imaginación y el razonamiento utilizados, mientras se transforma el error en una oportunidad de aprendizaje.
— Se pregunta a los alumnos cómo han resuelto la actividad. Un alumno explica su estrategia al resto de compañeros.
— Se buscan, siempre, una o dos estrategias alternativas, que evidencien la no existencia de una única resolución de problemas en Matemáticas.

Producciones

Con el fin de extraer conclusiones, se presentarán y analizarán las producciones más interesantes del alumnado.



Conclusiones

De la actividad, siempre susceptible de modificaciones y mejoras futuras, se han extraído varias conclusiones que consideramos interesantes.

La calculadora, relegada a la mera resolución de operaciones aritméticas, se ha mostrado una herramienta muy potente en la generación de estrategias de resolución de problemas con operaciones aritméticas que combinan:

— El cálculo mental.
— Las operaciones inversas.
— Uso de estimaciones.
— La aplicación de propiedades de las operaciones de los diferentes conjuntos de números.
— La resolución de problemas, siendo la imposibilidad del uso de ciertas teclas de la calculadora el propio problema a resolver.

Esta tarea ha resultado muy útil para trabajar las competencias específicas que se pretendían y nos ha permitido poner en valor una herramienta tradicional y habitual en el aula de matemáticas, como es la calculadora científica, al darle un nuevo enfoque a su uso.

Pero lo más importante, ha empoderado a nuestro alumnado haciéndoles guías de su propio aprendizaje y a nosotros, como docentes, nos ha dado la oportunidad de aprender, de crecer y de disfrutar de nuestro trabajo.

Historias matemáticas para niños con discapacidad intelectual

por
María José Sieso Otal y Miriam Hernández Moyano
(CEIP San Braulio Zaragoza)

Las matemáticas son consideradas una disciplina abstracta, difícil para muchos niños y especialmente para aquellos que tienen una discapacidad intelectual. El trabajo con ellos acostumbra a reducirse a tareas mecánicas puesto que no se les consideran capaces de comprender. Estos niños se ven así privados del acceso a una educación matemática de calidad.

Sin embargo hay autores (Cogolludo, Gil, 2019; Monari, 2002;Faraguer, 2014) que apuestan por considerar las matemáticas como una disciplina que contribuye al desarrollo integral de estos niños, y la mejora de la confianza en sí mismos. Una adecuada elección de contenidos y el uso de una metodología que ponga en juego todos los sentidos son alguna de las claves que se proponen para el trabajo con estos niños.

Este trabajo presenta una experiencia en el trabajo con las matemáticas con niños con discapacidad intelectual del colegio San Braulio de Zaragoza, de edades comprendidas entre 7 y 14 años, que se centra en el trabajo con conceptos geométricos a partir de la consciencia corporal. Con él se ponen de manifiesto algunos de los valores formativos de las matemáticas (Millán, 2015)

Contexto

El colegio San Braulio es un centro bilingüe en francés en todos los cursos que se encuentra situado en la Margen Izquierda de Zaragoza, acogiendo a alumnos de los barrios Zalfonada, Arrabal y Picarral. Funcionan en él doce unidades: cuatro en infantil, ocho en primaria, un aula preferente TEA y tres aulas de Educación Especial.

Las aulas de Educación Especial se han ido implantando progresivamente: el aula «Conquistadores», de 6 alumnos, lleva en marcha seis cursos escolares, el aula «Circo» de 6 alumnos, lleva cuatro cursos y el aula «Castores», de 5 alumnos, lleva dos cursos implantados en el centro. Las tutoras de las dos primeras aulas, autoras de la presente comunicación, llevamos en la actualidad tres cursos como docentes definitivas en el centro. Las edades están comprendidas entre los 7 y los 15 años. En el aula de Circo hay dos niños con TEA y cuatro niños con discapacidad intelectual moderada, uno de ellos con síndrome de Down. En el aula de Conquistadores hay un alumno TEA, una alumna con parálisis cerebral con discapacidad intelectual moderada y cuatro alumnos con discapacidad intelectual moderada, uno de ellos con síndrome de Down.

Las aulas de Educación Especial en colegios ordinarios, (en la actualidad en la ciudad de Zaragoza hay 3 aulas en el CEIP San Braulio y 2 aulas en el CEIP Julián Sanz Ibáñez del barrio de las Fuentes) son una oportunidad para la inclusión de los alumnos con necesidades educativas especiales. Por una parte, ellos se benefician de la interacción y socialización con niños de desarrollo normotípico en diversas situaciones: recreo, comedor, actividades de centro, de nivel, talleres. Por otro lado, los alumnos de las aulas ordinarias se benefician también de este aprendizaje vicario porque la inclusión siempre supone experiencias enriquecedoras. Comparten con compañeros de aulas ordinarias teniendo como referencia la edad cronológica las áreas de Plástica, Música y Educación Física, mientras que están en el grupo de aula especial para las áreas de más contenido curricular como es el lenguaje y las matemáticas.

En lo que se refiere a matemáticas, dentro del aula de Educación Especial trabajamos con una variedad de metodologías y prácticas docentes desde un enfoque funcional. Trabajamos desde múltiples contextos para dotar a los niños de una serie de herramientas matemáticas (estrategias, recursos, apoyos) que les permitan desenvolverse en situaciones de su vida diaria (hacer una lista de la compra, memorizar y marcar un teléfono, clasificar, ordenar y contar artículos, ordenar objetos por tamaños, saber localizar y explicar la dirección de su vivienda…). Para ello utilizamos materiales manipulativos, pictogramas, aplicaciones y juegos digitales…Teniendo en cuenta la diversidad funcional de nuestros alumnos y alumnas hemos trabajado diferentes contenidos matemáticos:

— Sistemas de numeración: lectura y escritura de cifras, iniciación a los números ordinales.
— Algoritmo de la suma de números naturales e iniciación a la resta.
— Habilidades lógicas como la clasificación, la seriación y la ordenación.
— Representación de datos numéricos en tablas.
— Reconocimiento de formas geométricas básicas.

Todos estos temas tratamos de abordarlos desde un enfoque práctico de resolución de problemas.

Participación en el programa Hipatia de la Facultad de Educación de Zaragoza

El programa Hipatia es un programa de formación del profesorado auspiciado por la Facultad de Educación de Zaragoza que promueve la colaboración entre centros educativos aragoneses y la Universidad de Zaragoza a través de estancias formativas bidireccionales. Su objetivo es crear redes de trabajo colaborativo y compartir buenas prácticas para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Además, pretende generar proyectos conjuntos de investigación educativa y también reflexionar y diseñar acciones que incidan en la calidad de enseñanza de todos los niveles.

El centro comenzó la participación en el programa en el curso 20-21 y durante el curso 21-22, continuó esta colaboración. Las profesoras de las aulas de Educación Especial teníamos una inquietud acerca de nuestra formación en matemáticas. Queríamos conocer herramientas matemáticas con una fundamentación más teórica o científica para trabajar con nuestros alumnos con discapacidad intelectual moderada y de edades fuera ya de la etapa de infantil, conceptos matemáticos abstractos aplicándolos a los contextos de nuestros proyectos. Y así, a través de Hipatia entramos en contacto con Elena Gil Clemente profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, especialista en didáctica de las matemáticas para alumnos con discapacidad intelectual. Durante el curso llevamos a cabo las siguientes sesiones:

— Dos sesiones de formación en el centro con un equipo formado por las autoras de esta comunicación y otro profesorado interesado. Estas sesiones se llevaron a cabo el 10 y el 24 de marzo de 2022. En el transcurso de ellas se reflexionó sobre el papel que las matemáticas tienen en la formación de una persona con discapacidad intelectual y se presentaron algunas propuestas sobre cómo plantear la educación matemática. Estas propuestas apostaban por el trabajo con la geometría como forma de despertar al niño a la consciencia del mundo, siguiendo la inspiración de pedagogos del siglo XIX como Edouard Séguin (Séguin, 1866) o matemáticos del siglo XX como Miguel de Guzmán (Guzmán,2007). A lo largo de las sesiones se presentó la publicación digital *Talleres Temáticos* para alumnos con discapacidad intelectual (Gil, 2022). Estos talleres se aplican desde el año 2017 con niños con síndrome de Down de la asociación SESDOWN de Zaragoza en el ámbito extraescolar.
— Decidimos embarcarnos en esta experiencia de enseñar las matemáticas de una forma comprensiva, trabajando estos talleres temáticos con niños con discapacidad intelectual de diferentes diagnósticos, características y necesidades, y en el ámbito escolar. Observaríamos cómo alumnos y alumnas que no tienen síndrome de Down se desenvolvían con estas actividades y contribuiríamos así en cierta manera a la investigación. La experiencia se desarrolló entre los meses de marzo, abril y mayo de 2022.
— Estaba prevista nuestra participación en el seminario «Geometría para la diversidad» que se lleva a cabo en la Facultad de Educación, para contar la experiencia, pero no se llevó a cabo.

Talleres temáticos para la Educación Matemática de niños con discapacidad intelectual

Se trata de una publicación digital (Gil, 2022) desarrollada en el marco del proyecto europeo Erasmus+ «Aprender de los niños para formar a los maestros en el área de matemáticas» y está concebida como una guía multimedia.

La propuesta incluye claves didácticas destacadas:

— Propone un encuentro con las matemáticas a través del número y la forma y explota los procesos que comparten la aritmética y la geometría: la comparación, la composición y descomposición y la repetición de elementos iguales.
— Utiliza la fuerza de la mimesis, recurriendo a la fantasía y a la identificación con unos personajes para hacer surgir ideas matemáticas para dar respuesta a retos humanos.
— Trabaja con imágenes potentes que encierren relaciones geométricas y aritméticas y estén estrechamente ligadas a la historia que se vive en cada taller.
— Potencia la comunicación entre los participantes a raíz de los descubrimientos matemáticos que hacen.

Se presentan diez talleres temáticos (*Inuits*, *Astronautas en el espacio*, *¡Qué vienen los piratas!*, *Los poderes de los superhéroes*…) para trabajar con niños con discapacidad intelectual en dos versiones: iniciación y avanzada. Cada una de las versiones describe con detalle entre seis y ocho actividades con una clara referencia a los contenidos matemáticos trabajados. Cada taller propone una canción que está ligada al tema del que trata y que puede ser coreografiada con movimientos que tienen que ver con la geometría y unas imágenes que pueden dar pie a la comunicación sobre aspectos matemáticos. Cada uno de ellos incluye además un video en el que se presenta una secuencia didáctica de interés para los maestros (figura 1).

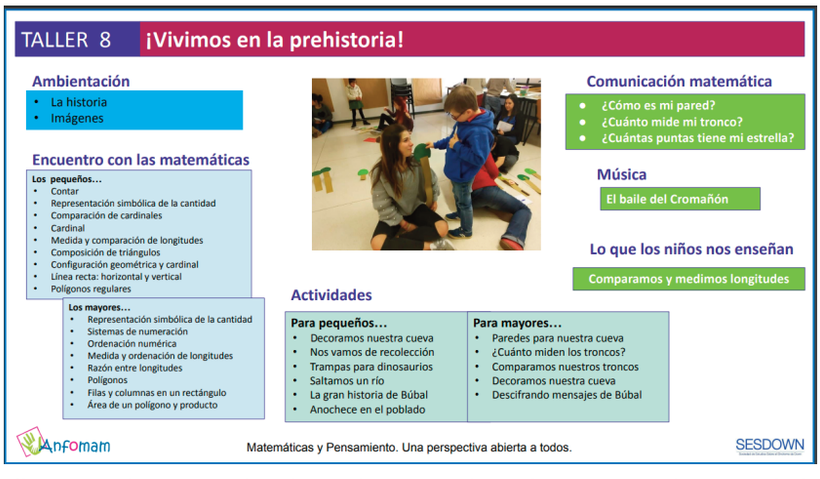


Figura 1. Talleres Temáticos para la educación matemática de niños con discapacidad intelectual

Nuestra experiencia

Seleccionamos el taller *Egipto y los tensores de cuerdas* por coincidir con el proyecto sobre África que en ese momento estábamos llevando a cabo en el centro. Seleccionamos tres actividades de entre las indicadas por la guía. Las llevamos a cabo con los niños de las aulas Circo y Conquistadores en el mes de mayo en la semana del 23 al 28 de mayo.

Actividad	*Duración*	*Contenidos matemáticos*
Los egipcios eran tensores de cuerdas	90 minutos	Línea: línea recta y línea curva. Punto
Tras la crecida del Nilo, a reconstruir	60 minutos	Cuadrado y rombo
Construimos pirámides	60 minutos	Desarrollo plano de las pirámides cuadrangulares: cuadrados y triángulos

Tabla 1. Desarrollo de las actividades

Comenzamos el taller contando la Historia de Egipto que se propone en la guía, ayudados de pictogramas (www.arasaac.org). Gracias a esta forma de comunicación aumentativa, nuestros alumnos y alumnas se ven favorecidos con ayudas visuales que les permiten seguir la narración, identificarse y vibrar con ella y comprenderla a su manera.

Los egipcios eran tensores de cuerdas

Dimos a cada pareja de niños una cuerda (hebra de lana). Les pedimos que jugaran con ella como hacían los egipcios, tensándola y destensándola. Esta primera parte de la actividad estaba destinada a que los niños pudieran darse cuenta de las diferencias entre una línea curva y una línea recta. Por trabajo en equipos fueron viviendo y manipulando esa cuerda y así podíamos hablar de una línea recta o curva según estuviera tensa o no. Para comprobar el significado de línea recta nos apoyamos en las líneas de la baldosa e introdujimos una nueva herramienta, la regla.

La cooperación entre los dos compañeros fue un factor importante que les ayudó a percibir cuando la lana estaba recta. Posteriormente trabajamos el dibujo de líneas rectas en equipos de tres alumnos: dos tensaban la cuerda y el tercero dibujaba una recta con rotulador. Al dibujarlas una debajo de otra introdujimos la idea de líneas paralelas y pensamos en lugares en los que podíamos ver esas líneas paralelas como las que habíamos dibujado (vías del tren, líneas de la carretera…

Contenidos trabajados

Esta actividad está destinada al trabajo con los conceptos primordiales de la geometría, punto, línea y línea recta, y a la relación de conexión básica entre ellas. Estos conceptos aparecen ya en la geometría de Euclides y el trabajo que se realiza aquí remite a la definición euclidiana: «línea recta es la que yace por igual respecto a todos sus puntos» (Euclides, ed.1991). Al estirar la cuerda y ponerla muy tensa, estamos mostrando a los niños que de todas las líneas (posición de la cuerda) con las que podemos unir dos puntos (ellos mismos) hay una que es muy especial, que es la línea recta.

Valoración

Los alumnos disfrutaron jugando y cooperando, y sin darse cuenta aprendieron tres conceptos: línea recta, línea curva y rectas paralelas, La actividad era muy sencilla de llevar a cabo, requería poca manipulación de herramientas pero en el aula de Conquistadores algunos niños necesitaron ayuda del adulto y de más modelamiento por sus problemas motrices pero pudieron seguir y disfrutar de esta actividad (figuras 2 y 3).

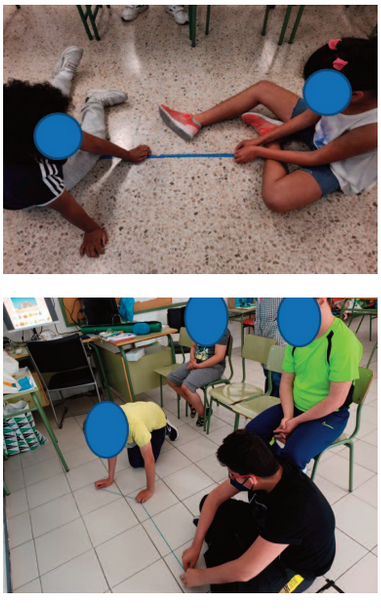


Figura 2. Tensando la cuerda para formar rectas

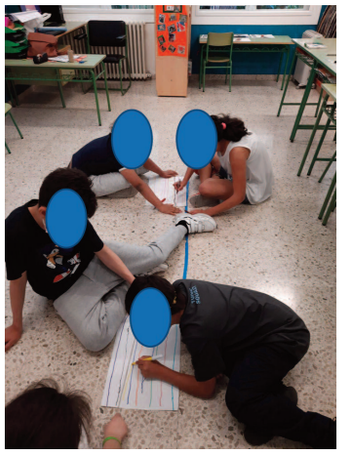


Figura 3. Dibujando rectas y paralelas

Tras la crecida del Nilo… ¡A reconstruir!

En Egipto, las grandes avenidas del río Nilo destruían los campos y los agricultores tenían que reconstruir su campo. Muchos de los campos eran cuadrados, así que vamos a aprender a construir esta figura.

Comenzamos cortando 4 hebras iguales que atamos, por parejas, fuimos modelando y moldeando para que obtuvieran un cuadrado y un rombo, según cómo movían las hebras.

Con ayuda de los adultos, maestras y auxiliares manipulábamos con ellos esas cintas unidas y las dibujábamos en un plano para trabajar la diferencia entre rombo y cuadrado. El cuadrado era un concepto ya adquirido en las aulas y diferenciado respecto al triángulo y al círculo, pero el rombo no lo habíamos trabajado (figura 4).

Posteriormente se formaron de nuevo los equipos. A cada equipo de 3 alumnos se le repartió una cartulina y con las 4 hebras unidas tenían que formar cuadrados y dibujarlos. Una vez dibujados se recortaron. Se repartió un cuadrado a cada alumno y se explicó que íbamos a convertir esos cuadrados en un huerto (figuras 5 y 6).

Con ayuda de la regla, en cada cuadrado cada alumno dibujó líneas paralelas para formar los surcos de cultivos. En cada surco dibujaron los productos indicados (tomates, zanahorias, patatas y lechugas) y los colorearon.

Contenidos trabajados

Con esta actividad comenzamos trabajando la comparación de longitudes. La comparación es una operación de la mente que nos ayuda a percibir relaciones en el mundo y a generar ideas abstractas y por ello es básica para niños que tienen una discapacidad intelectual (Séguin, 1866).

El segundo contenido que trabajamos fue los cuadriláteros, polígonos de cuatro lados. Nuestros cuadriláteros tenían los cuatro lados de la misma medida. Todos ellos eran rombos y entre ellos uno especial, es el que además tenía todos los ángulos rectos, el cuadrado. Concebir el cuadrado como un tipo de rombo les da a los niños una intuición del continuo geométrico (se pasa de una figura a otra de forma progresiva) y les ayuda a tener una visión relacional de las figuras, que va mucho más allá de reconocer la figura del cuadrado entre otras diferentes.

Valoración

En esta actividad fue necesaria la mediación de un adulto para conseguir formar esos cuadrados y que los distinguieran de los rombos. Dibujar la figura en el plano les ayudó a ver mejor el rombo. La segunda parte de dibujar, pintar y recortar su huerto les gustó mucho y les ayudó a dar sentido a lo trabajado.

Figura 4. Construyendo cuadriláteros equiláteros

Figura 5. Dibujamos en el plano

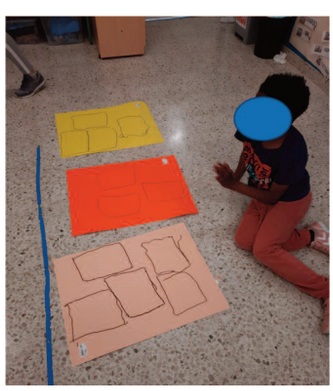


Figura 6. Los cuadrados

Construcción de pirámides

Los egipcios eran muy hábiles y construían unos edificios enormes y muy bonitos que eran las pirámides.

Pusimos a disposición de los niños un material formado por figuras planas, entre las que se encontraban triángulos equiláteros y cuadrados en una material imantado que favorece la construcción de figuras 3D a partir de su desarrollo plano. Primero lo hicimos las profesoras para que entendiesen lo que les estábamos pidiendo. Posteriormente les repartimos cuadrados y triángulos y les pedimos que construyeran la pirámide. Los niños se implicaron mucho en la construcción (figura 7).

En el aula de Circo además se trabajó el paso de la construcción manipulativa con este material magnético al dibujo en el plano. Se les entregó un folio y un rotulador y se les pidió que dibujaran una pirámide (figura 8). En los dibujos recogidos había un triángulo, una pirámide hecha con imanes igual a la que se retrató en sus fotos pero un alumno llegó a dibujar un cuadrado y en cada lado del cuadrado un triángulo, mostrando una capacidad excepcional de representación simbólica (figura 9).

Contenidos trabajados

Trabajamos en primer lugar con el reconocimiento de polígonos regulares (cuadrado y triángulo equilátero) y la congruencia de sus lados.

En segundo lugar trabajamos con el desarrollo plano del cuerpo 3D que es la pirámide cuadrangular. Este desarrollo está formado por un cuadrado y cuatro triángulos iguales (que en este caso son equiláteros). Descubrir que una figura plana se puede convertir en 3D y viceversa (cosa que este material favorece) ayuda a los niños a percibir relaciones lo que es de gran ayuda para niños con discapacidad intelectual.

Valoración

Es la actividad que más les gustó y con la que más disfrutaron. Prueba de ello es que todos pidieron hacer fotos de su pirámide.

También fue la actividad de mayor satisfacción personal para el docente, el que los alumnos fueran capaces de construir y dibujar el desarrollo de una pirámide en un folio mostró que eran capaces de un cierto nivel de representación simbólica.

Figura 7. Construyendo pirámides

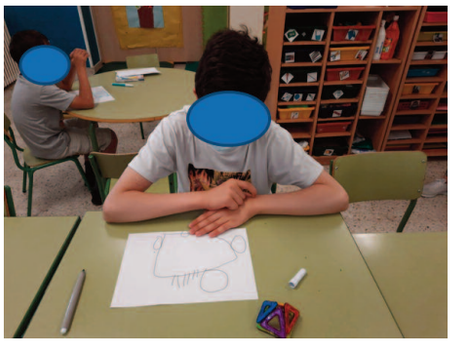


Figura 8. Dibujando el desarrollo plano

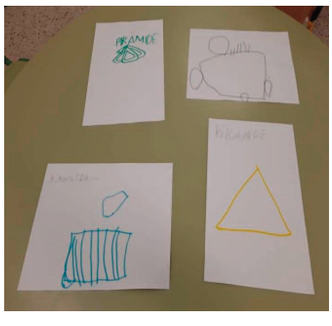


Figura 9. Desarrollos

Conclusiones

Esta experiencia nos ha permitido trabajar las matemáticas desde otra perspectiva más contextualizada, introducirla en nuestra dinámica diaria y adaptarla a los diferentes proyectos que trabajamos con ellos, de los que estaban ausentes las matemáticas.

La introducción de la geometría ha sido un elemento fundamental y hemos podido observar cómo resulta a la vez intuitiva y retadora a los niños. Las actividades presentadas eran aparentemente sencillas y partían de una experiencia corporal (estirar cuerdas o construir pirámides con un material) pero permitieron que varios de los niños alcanzaran diversos grados de representación simbólica (descubrimiento del paralelismo, representación de campos en papel, dibujo del desarrollo plano de una pirámide).

Pudimos comprobar que los estudiantes comprendían y asimilaban los contenidos trabajados, ya que al repetir las actividades en varias observamos un mayor grado de autonomía en su realización. Hemos podido intuir cómo el trabajo con las matemáticas, en particular con la geometría, mejora la percepción del mundo por parte de los niños y les hace sentirse más seguros de sí mismos.

Las actividades tenían sentido para los niños y niñas y se involucraron en ellas con agrado. Permitían el trabajo por parejas implicando por tanto valores de ayuda y cooperación, que contribuyeron a tener un ambiente de aula enriquecedor. Son contenidos que también podemos trabajar de forma inclusiva con las aulas ordinarias.

En definitiva, creemos que estas experiencias son buenas prácticas que deben ser compartidas porque creemos fundamental que otros profesionales de las matemáticas conozcan alternativas metodológicas en este campo y sobre todo, en el trabajo con alumnado con necesidades educativas especiales. Es necesario seguir investigando y aportar nuevas formas de enseñar las matemáticas que les permitan avanzar en todas las facetas de su vida adaptándonos a su diversidad funcional.

Creemos en los valores de una sociedad basada en el conocimiento, el respeto y la atención a la diversidad como unión y no como diferencia y el trabajo con las matemáticas desde una perspectiva basada en la persona tiene un papel central para conseguirlos.

Líneas para un trabajo futuro

Durante este curso mantenemos la participación en el programa Hipatia y la colaboración con el departamento de matemáticas. Estamos aplicando lo trabajado al proyecto de Roma que trabajamos en el primer trimestre del curso 22-23 y hemos dado el paso de diseñar nuestras propias actividades siguiendo la inspiración de los talleres temáticos: hemos entrado en contacto con los *miliarios* con los que trabajamos la medida usando como unidad sus pies y relacionándolo con los sistemas de numeración; hemos construido un acueducto, con lo que trabajamos el concepto de pendiente para explicar cómo llegaba el agua a las ciudades; hemos visitado el Coliseo en el que hemos trabajado con distintas figuras que tienen lados curvos como el círculo y la elipse.

Referencias bibliográficas

COGOLLUDO, J. I. y E. GIL (2019), «The Effectiveness of Teaching Geometry to Enhance Mathematical Understanding in Children with Down Syndrome», *International Journal of Disability, Development and Education*, 66(2), 1–20.

EUCLIDES (1991), *Los Elementos,* Biblioteca Clásica Gredos (Traducción y notas de Puertas Castaño, M.L.).

FARAGHER, R. y B. CLARKE (ed) (2014), *Educating learners with Down Syndrome*, Routledge, New York.

Gil, E. (2020), *Matemáticas que suman*, Horsori, Barcelona.

— (2022) *Talleres temáticos para la educación matemática de niños con discapacidad intelectual: guía multimedia*, Servicio de Publicaciones. Universidad de Zaragoza. <https://zaguan.unizar.es/record/110895>.

GUZMÁN, M. (2007), «Enseñanza de las ciencias y la matemática», *Revista Iberoamericana de Educación*, 158.

MILLÁN, A. (2015), *Numeri e forme*, Zanichelli, Bologna.

MONARI, E.(2002), «Learning mathematics at school… and later on. Down syndrome», News and Update 2 (1), 19-23.

SÉGUIN, E. (1866), *Idiocy: and its treatment by the physiological method*, Augustus M. Kelley, New York.

¿Un Papá Noel?, ¿en marzo?

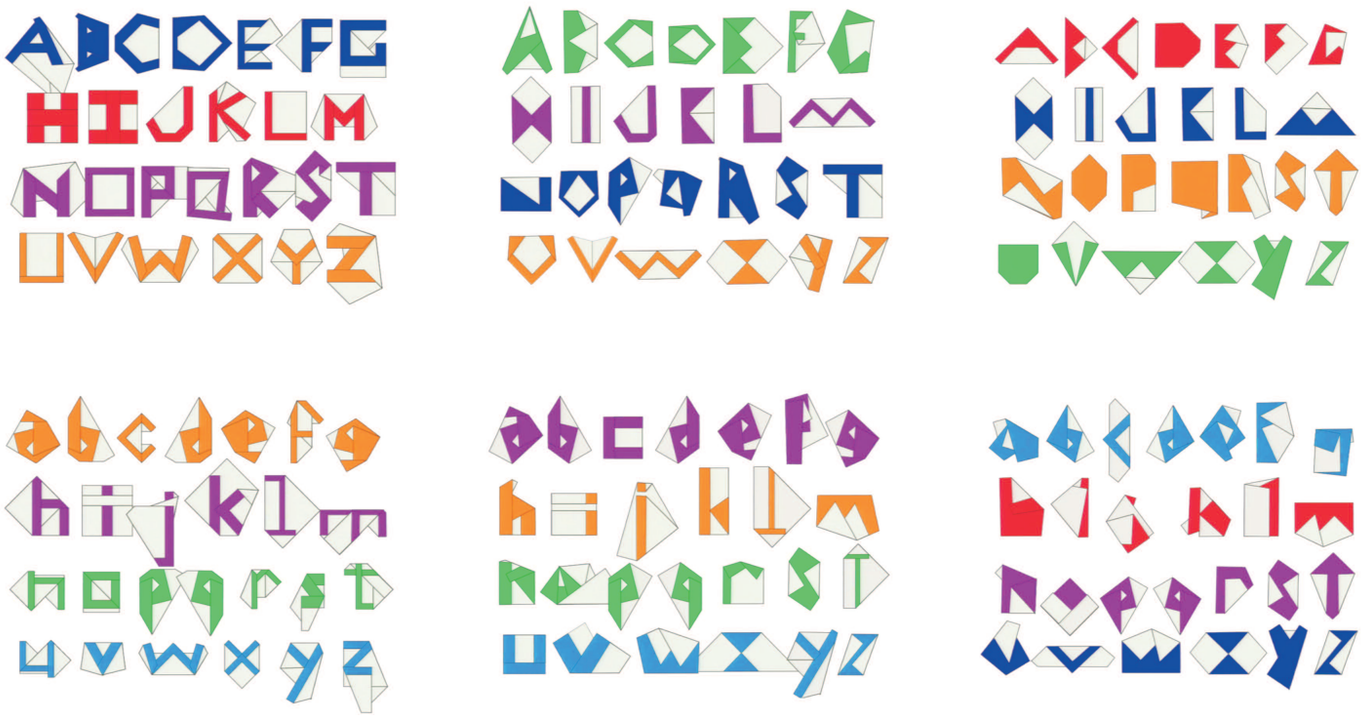
por

José Ángel Iranzo Sanz y Maider Goñi Urreta

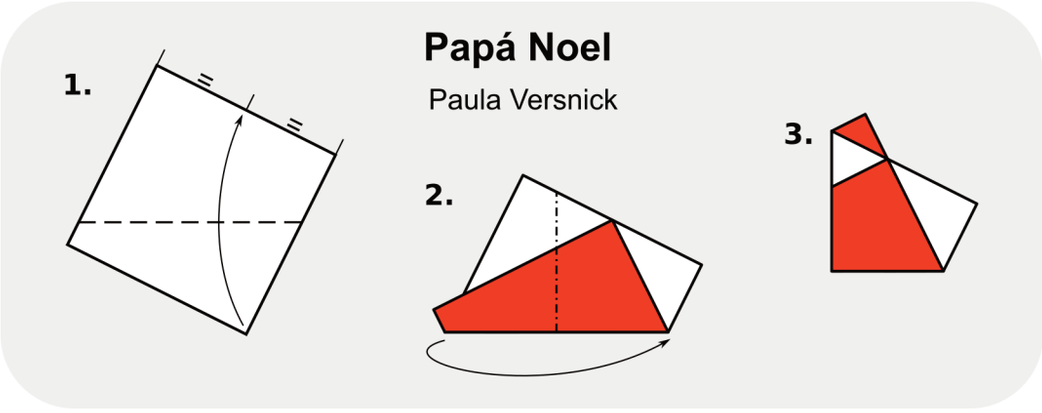
(Universidad de Zaragoza; IES Cabañas, La Almunia de Doña Godina)

Muchas figuras de papiroflexia requieren de cientos de pasos para ser realizadas. En otras, en cambio, basta con una veintena de pliegues. Si deseamos introducir la papiroflexia en una clase de matemáticas es preferible que la figura en sí sea sencilla y, además, no suponga mucho tiempo de plegado, de manera que este pueda aprovecharse para discutir algún concepto matemático relativo a la figura de papel realizada.

En este artículo se plantean varios problemas sobre una figura minimalista que tan solo tiene dos pasos. Se trata de un caso extremo en cuanto a sencillez, pero no es único. Probablemente, la figura más famosa con menos pliegues (¡uno!) sea el estegosaurio de Joseph Wu. También son llamativos los alfabetos de la matemática e ingeniera estadounidense Jeannine Mosely: ha sido capaz de plegar cada una de las letras del alfabeto, tanto minúsculas como mayúsculas, utilizando solo 4 pliegues. Y también utilizando solo 3 pliegues. ¡Y también con solo 2 pliegues por letra!



En marzo de 2023, en uno de los talleres de la V Jornada de Educación Matemática en Aragón, enseñamos a plegar, entre otras figuras, el papá Noel diseñado por Paula Versnick. Al terminar el taller una de las asistentes contaba a sus compañeros que había aprendido a hacer un Papá Noel, a lo que uno le dice: «¿Un Papá Noel?, ¿en marzo?». Más allá de la anécdota, se trata de una figura sencilla que permite plantear problemas matemáticos a distintos niveles. Para plegarla es necesario un papel cuadrado con una cara de color rojo y otra de color blanco. Basta doblar uno de los vértices del cuadrado hasta el punto medio de uno de los lados no contiguos. Después, se realiza un pliegue perpendicular al anterior por su punto medio.



El objeto de interés en este caso no es precisamente la figura final, sino la obtenida en el paso inmediatamente anterior. En la figura 1 se ilustra dicho paso intermedio y se han denotado con letras varios puntos de interés. Esta figura permite trabajar conceptos variados: desde rectas que se cortan y que pueden verse al trasluz a procedimientos para dividir el papel en tres partes iguales, pasando por semejanza de triángulos o ternas pitagóricas. Como puede observarse, consta de tres triángulos rectángulos blancos: dos por delante y uno por detrás.

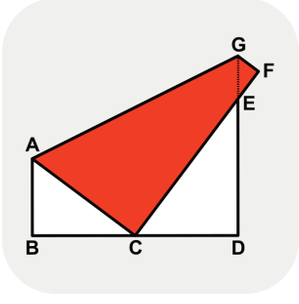


Figura 1

Semejanza de triángulos

Los tres triángulos blancos (*ABC*, *CDE* y *EFG*) son triángulos rectángulos. Deducir que, además, dichos triángulos son semejantes es sencillo si se tienen en cuenta los ángulos que los forman. Otro triángulo semejante a los anteriores es el definido por los vértices *ACE*, aunque en este caso no es tan evidente. Para comprobarlo basta utilizar las relaciones existentes entre los lados de los triángulos *ABC* y *CDE*:

$$\Delta\, ABC \text{ y } \Delta\, CDE \text{ semejantes} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{CD}{AB} \xrightarrow{CD = BC} \frac{CE}{AC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\xrightarrow{\Delta\, ABC \text{ y } \Delta\, CDE \text{ rectángulos}} \Delta\, ABC \text{ y } \Delta\, ACE \text{ semejantes}$$

Sobre la figura final, tanto el saco como el gorro de Papá Noel son también triángulos semejantes. En dichos triángulos la suma de la hipotenusa y el cateto menor es igual al lado del cuadrado en el caso del saco e igual a la mitad del lado del cuadrado en el caso del gorro (se puede comprobar desplegando la figura). Esto permite estudiar la relación entre los perímetros de saco y gorro (uno es doble que el otro) o entre sus áreas (una es cuatro veces la del otro).

Ternas pitagóricas

El triángulo rectángulo más sencillo de construir y que, posiblemente, se utilizó para trazar ángulos rectos hace ya miles de años es aquel cuyos lados tienen las longitudes 3, 4 y 5 unidades, o cuyas medidas guardan estas proporciones. La terna (3, 4, 5) es una de las infinitas ternas pitagóricas existentes y también aparece en los triángulos de la figura 1, ya que los triángulos que ahí aparecen (*ABC*, *CDE* y *EFG*) tienen lados proporcionales a dicha terna.

Una forma sencilla de comprobarlo consiste en suponer que el lado del cuadrado original mide 8 unidades. Por tanto, en el triángulo *ABC*, el lado *BC* mide 4 unidades y los otros dos lados miden 8 unidades entre los dos. Utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene que los lados *AB* y *AC* miden 3 y 5 unidades, respectivamente.

División del papel en tres partes iguales

Para dividir el lado de un cuadrado en 2, 4, 8 o 16 partes iguales no es necesario, en principio, consultar ningún manual de papiroflexia, ya que de forma natural a uno se le ocurre dividir por la mitad una y otra vez. Sin embargo, la forma de dividir el lado del papel en 3 o 5 partes iguales no es tan evidente y, generalmente, es necesario recurrir a algún método específico. Uno de ellos se basa en los triángulos de la figura 1 y se deduce fácilmente calculando la medida del segmento *DE*. Continuando con los cálculos anteriores, en los que habíamos supuesto que el lado del cuadrado tenía una longitud de 8 unidades, y utilizando las propiedades de semejanza de triángulos, se obtiene que el lado *DE* mide 16/3, es decir, 2/3 de 8 unidades. Por tanto, para dividir el lado del cuadrado en tres partes iguales basta con doblar por la mitad el segmento *DE*.

Teorema de Haga

Como se ha visto, el primer paso para realizar el Papá Noel consiste en llevar una de las esquinas sobre la mitad de uno de los lados. Si en lugar de llevar dicha esquina al punto medio se lleva hasta cualquier punto del lado del cuadrado se obtiene, por ejemplo, un plegado como el de la figura 2, en el que se han señalado dos longitudes: x e y.

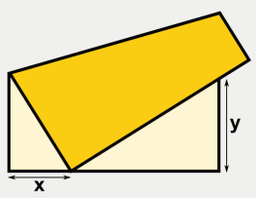


Figura 2

De acuerdo con el apartado anterior, si el lado del cuadrado mide 8 unidades y $x = 4$, entonces $y = 16/3$. Por tanto, si el lado del cuadrado mide 1 unidad y $x = 1/2$, entonces $y = 2/3$, deduciendo así un método para dividir el lado del papel en tres partes iguales.

Con un razonamiento similar al llevado a cabo previamente en este artículo se puede calcular el valor de y para cualquier valor de x sobre un cuadrado cuyo lado mida 1. En particular, se obtiene que $y = 2x/(1+x)$. En la siguiente tabla se observan los valores de y para distintos valores de x:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
y	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{5}$	$2\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{7}$	$2\frac{1}{8}$	$2\frac{1}{9}$	$2\frac{1}{10}$	$2\frac{1}{11}$

Como puede observarse, si sabemos dividir el lado del papel en partes iguales ($x = 1/n$), obtendremos que el segmento y mide $2/(n+1)$ y dividiéndolo por la mitad habremos dividido el lado del papel en $1/(n+1)$ partes iguales.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza), Daniel Sierra Ruiz (CPI El Espartidero, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Octubre de 2023
ISSN: 2386-8821e

CC BY NC SA