Estrategias ante problemas que movilizan ideas sobre la probabilidad condicional en Olimpiadas

por
José M. Rubio-Chueca, José M. Muñoz-Escolano y Pablo Beltrán-Pellicer
(Universidad de Zaragoza)

Hoy en día, cualquier persona debe tener unos conocimientos mínimos de probabilidad que le permitan tomar conciencia de sus decisiones, emitir juicios en los que intervengan sucesos o efectuar inferencias y predicciones. En este aspecto, debido a la importancia que tiene para cualquier ciudadano la estocástica, autores como Jones (2005) o Batanero (2006, 2014), señalan la necesidad de que toda la ciudadanía alcance un alto grado de alfabetización probabilística. En este sentido, el nuevo currículo estatal y el autonómico aragonés, se hacen eco introduciendo la probabilidad en el conjunto de saberes: sentido estocástico desde 1.º de ESO.

La probabilidad condicional, junto con la independencia de sucesos y probabilidad conjunta suponen una fuente importante de errores en los razonamientos y dificultades en su aprendizaje (Díaz y Batanero, 2009). Si bien es cierto que la probabilidad condicional aparece de forma explícita en 4.º de ESO, varios elementos sobre los que se construye dicha idea están recogidos en el currículo y deben ser enseñados desde el comienzo de la secundaria (tablas de doble entrada, diagramas de árbol).

Por otro lado, Toh (2013) señala que las olimpiadas matemáticas, más allá de ser concursos matemáticos puntuales, pueden servir como banco de recursos útiles para que los profesores elaboren tareas «ricas» con finalidades instruccionales. Al mismo tiempo, al ser actividades en las que participa alumnado con alta capacidad matemática es previsible que aparezca gran variedad de procedimientos y razonamientos intuitivos en las resoluciones de las tareas (Leikin, 2009). Tanto en Aragón como en España, no es habitual que en este tipo de concursos estén presentes tareas que movilicen conocimientos de probabilidad (Rubio-Chueca y otros, 2021).

Teniendo en cuenta lo anterior nace este estudio. En él nos hemos planteado si los participantes en la Olimpiada Matemática de Aragón de 2.º de ESO son capaces de desarrollar estrategias intuitivas en situaciones donde intervengan sucesos condicionados pudiendo ayudarnos al diseño de secuencias didácticas que favorezcan el proceso de enseñanza-aprendizaje de nuestro alumnado (Martínez-Juste y otros, 2015). Para llevarlo a cabo se van a analizar los procedimientos y estrategias en las resoluciones correctas de las tareas propuestas.

Metodología

El objetivo principal de esta investigación es analizar las resoluciones dadas por estudiantes que no han recibido ninguna instrucción previa ante diferentes problemas donde intervengan conceptos, procedimientos o argumentos relacionados con la probabilidad condicional.

En el estudio para el análisis de los objetos matemáticos ligados a la probabilidad se utiliza como método el análisis de contenido (Krippendorff, 2013) realizando un estudio de tipo exploratorio-descriptivo. Para llevarlo a cabo, identificamos y seleccionamos las prácticas matemáticas presentes en las resoluciones correctas escritas a los problemas que se plantean sobre probabilidad condicionada; codificamos ejemplos específicos según las categorías que nos permiten realizar un estudio de los datos de carácter cualitativo, y para que haya una mayor coherencia en el proceso, se revisa lo anterior mediante un análisis por triangulación por parte de los investigadores.

Muestra, unidades y categorías de análisis

La muestra corresponde a los estudiantes de secundaria con edades comprendidas entre 13 y 14 años que participaron en la fase final (47 participantes) de la XXIX Olimpiada Matemática en Aragón del año 2021 y la semifinal (606 participantes) y final (108 participantes) de la XXX Olimpiada Matemática en Aragón del año 2022.

Las unidades de análisis son las resoluciones a un problema sobre probabilidad condicionada llevadas a cabo por los participantes en las diferentes fases de las olimpiadas anteriormente mencionadas.

En cuanto a las categorías, se analizan los objetos matemáticos intervinientes en los procedimientos llevados a cabo por los resolutores, cuando la solución dada a la pregunta planteada ha sido la correcta.

Enunciados de los problemas

P1. Problema propuesto en la final de la XXIX Olimpiada Matemática de 2.º de ESO en Aragón

Pilar quiere ver una película en una plataforma de *streaming* con sus dos amigos, pero no saben cuál elegir. A Pilar se le ocurre lo siguiente:

— Vamos a utilizar el azar para la elección de la película. Para ello introduciremos unas bolas en dos bolsas de la siguiente manera. En la bolsa A introduciremos 3 bolas blancas y 4 negras, mientras que en la bolsa B introduciremos 3 bolas blancas y 2 bolas negras. Una vez introducidas las bolas, Jorge cogerá una bola de la bolsa A y la introducirá en la bolsa B. Finalmente, Julia extraerá una bola de la bolsa B y si la bola es blanca veremos la película «Hero-n» y si es negra veremos la película «Escuela de Rubik».

Sin embargo, Pilar tiene una duda: con esta forma de elegir la película que van a ver, ¿las dos películas tienen la misma probabilidad de ser elegidas o hay alguna de ellas que tiene mayor probabilidad?

P2. Problema propuesto en la semifinal de la XXX Olimpiada Matemática de 2.º de ESO en Aragón

Yendo toda la familia en el coche a mi pueblo, Trasobares, decidimos tener una pequeña aventura. Para ello, elegimos de forma aleatoria cada una de las intersecciones que nos vamos encontrando en la carretera. Nos ponemos en camino y cuando llevamos 60 km tenemos que dejar la autovía pudiendo elegir entre dos carreteras: la A o la B. Si vamos por la carretera A llegamos a un punto donde podemos optar entre dos comarcales: la A1 o la A2. La A1 nos lleva a una aldea que no conocemos, mientras que la A2 nos lleva directamente a mi pueblo. Sin embargo, si vamos por la carretera B, llegamos a un punto en el que tenemos que elegir entre tres comarcales: la B1, la B2 o la B3. Si elegimos la B3 nos lleva directamente a mi pueblo, mientras que el resto, nos lleva a otras dos localidades que no conocemos.

a) ¿Qué tiene más probabilidad: visitar otros lugares o Trasobares?¿Por qué?

b) Finalmente llegamos a Trasobares. Una vez allí, nos encontramos a mis primos y les explicamos lo sucedido. Entonces, mi padre riendo les dijo: «si acertáis por qué carretera nacional hemos venido os invitamos a comer», ¿qué carretera nacional tuvo más probabilidad de haber sido elegida, la A o la B? ¿Por qué?

P3. Problema propuesto en la final de la XXX Olimpiada Matemática de 2.º de ESO en Aragón:

Las gemelas Alba Pasol y Carmen Pasol son jugadoras de baloncesto indistinguibles a simple vista para su entrenadora. El porcentaje de acierto en tiros de campo de Alba es de un 40%, mientras que el de Carmen es de un 10%. El número de camiseta de Alba es el 9 y el de Carmen es el 2. Durante el descanso se cambiaron de camiseta, poniéndose la limpia completamente al azar. Cuando quedan escasos segundos para terminar el partido, su equipo va perdiendo de un punto y solo hay opción de lanzar una vez a canasta. La entrenadora elige sacar a la que lleva el 9 en la camiseta para lanzar ese tiro, dejando a la otra en el banquillo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el partido? ¿Por qué?

b) La jugadora encesta y ganan el partido. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido Alba la que haya encestado? ¿Por qué?

Resultados

Estrategias en el problema P1

En el análisis de las respuestas correctas (tabla 1) de los estudiantes se ha observado que 10 de ellos utilizaron un razonamiento de tipo verbal. De ellos, 4 no calcularon ninguna probabilidad y 6 las calcularon aunque no las pedía el enunciado. Otra forma correcta de resolver el problema es desde el significado clásico utilizando la probabilidad condicional. Desde esta perspectiva, 8 participantes usaron dicha estrategia, utilizando en algunos casos un diagrama de árbol. También se han observado técnicas combinatorias para resolver el problema. En concreto, 2 alumnos determinaron el espacio muestral y contabilizaron el número de casos atendiendo a los dos posibles escenarios. En este caso sus estrategias se vieron apoyadas por algún tipo de representación (tabular o diagramática). Para concluir, 1 alumno resolvió el problema utilizando una estrategia muy interesante, que recuerda a un ábaco probabilístico, podemos imaginar este ábaco en forma de árbol, solo que, en lugar de emplear sus ramas para representar probabilidades, lo que hace es introducir por su entrada un número de cuentas o fichas e irlas distribuyendo de forma equitativa. La elección del número inicial de fichas no es trivial, ya que debe permitir la distribución de cantidades enteras de fichas por todas las ramas del árbol (ábaco).

Estrategia utilizada	*N.º de participantes*
Razonamiento verbal cualitativo	4
Razonamiento verbal cuantitativo	6
Cálculo de probabilidad total	8
Técnicas combinatorias	2
Enfoque frecuencial similar al ábaco probabilístico	1

Tabla 1. N.º de participantes que emplearon cada una de las estrategias correctas en P1

Estrategias en el problema P2

Analizando las respuestas correctas que llevaron a cabo los estudiantes (tablas 2 y 3) se observaron diferentes estrategias desde un significado clásico para dar solución a las partes del problema.

En el apartado a) del problema, desde un significado clásico, 55 participantes dieron una respuesta correcta teniendo en cuenta la probabilidad total averiguando cuál es la probabilidad de llegar a Trasobares como suma de las conjuntas, mientras que 33 alumnos lo hicieron teniendo en cuenta las probabilidades condicionadas y la equiprobabilidad de elegir una de las carreteras en la primera intersección.

Estrategia utilizada	*N.º de participantes*
Cálculo de probabilidad total	55
Calculando las probabilidades condicionadas	33

Tabla 2. N.º de participantes que emplearon cada una de las estrategias correctas en a) de P2

En el apartado b) aparecieron dos estrategias correctas que emplearon los estudiantes, ambas desde un significado clásico. Por un lado, hubo 5 alumnos que determinaron y compararon las probabilidades condicionales y la equiprobabilidad en los sucesos iniciales. Por otro lado, hubo 17 personas que calcularon y compararon las probabilidades conjuntas. Ambos procedimientos son correctos, mediante un lenguaje más formal usando el teorema de Bayes la comparación de las probabilidades condicionales o conjuntas determinan la solución.

Estrategia utilizada	*N.º de participantes*
Uso de probabilidades condicionadas y equiprobabilidad	5
Calculando las probabilidades conjuntas	17

Tabla 3. N.º de participantes que emplearon cada una de las estrategias correctas en b) de P2

Estrategias en el problema P3

Teniendo en cuenta las estrategias correctas de resolución (tablas 4 y 5) de los dos apartados y desde un significado clásico, 25 alumnos resolvieron la parte a) utilizando de manera más formal la probabilidad total, 17 estudiantes lo hicieron mediante la media aritmética de las probabilidades condicionadas y 3 estudiantes lo resolvieron mediante la regla de Laplace.

Estrategia utilizada	*N.º de participantes*
Uso del concepto de probabilidad de Laplace	3
Uso de la regla de la suma de probabilidades	25
Uso de la media aritmética en las probabilidades condicionadas	17

Tabla 4. N.º de participantes que utilizaron estrategias correctas en el apartado a) de P3

Para resolver la parte b) utilizando un significado clásico, 23 establecieron algún tipo de proporción respecto a las probabilidades condicionadas o conjuntas y 7 contabilizaron de algún modo los casos favorables de todos los posibles utilizando la regla de Laplace.

Estrategia utilizada	*N.º de participantes*
Uso del concepto de probabilidad de Laplace	7
Uso de la proporción en las probabilidades	23

Tabla 5. N.º de participantes que utilizaron estrategias correctas en el apartado b) de P3

Conclusiones

Los estudiantes, a pesar de no tener los conocimientos previos sobre probabilidad condicional, han usado estrategias que les han llevado a resolver los problemas de forma correcta. Esto es debido a que los enunciados de los problemas planteados promueven la aparición de distintos razonamientos y modos de abordarlos de una manera sencilla, movilizando procedimientos auxiliares que favorecen su resolución.

La variedad y corrección de muchas estrategias presentadas por los resolutores en las respuestas analizadas en los tres problemas es debida a algunas de las condiciones existentes en los mismos, como, por ejemplo, asumir la equiprobabilidad en la elección de la carretera o de la camiseta de las jugadoras. Esto nos lleva a concluir que, una vez afrontadas las tareas propuestas, sería óptimo plantear otro tipo de situaciones-problema similares en contexto parecidos, en las que se dé otro tipo de condiciones que potencien la experimentación e indagación por parte del alumnado, por ejemplo, que no exista la equiprobabilidad en los sucesos.

Para finalizar, se ha observado que la muestra elegida para detectar procedimientos y argumentos intuitivos formada por participantes de una olimpiada matemática, ya que en este tipo de pruebas participa un alto porcentaje de alumnos con alta capacidad matemática, nos ofrece un importante recurso para descubrir una variedad de aproximaciones al concepto muy importante.

Agradecimientos

Ayuda PID2019-105601GB-I00 financiada por MCIN/ AEI /10.13039/501100011033 y apoyo del grupo "Investigación en Educación Matemática" financiado por el Gobierno de Aragón.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2006), «Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo», *Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Estadística y azar*, Thales, Granada.

— (2014), «Probability teaching and learning», en S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer.

Díaz, C., y C. Batanero (2009). «Students' formal knowledge and biases in conditional probability reasoning. Do they improve with instruction?», *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 131-162. <https://doi.org/10.29333/iejme/234>.

Jones, G. A. (Ed.) (2005), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Springer, New York.

Krippendorff, K. (2013), *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*, Paidos, Barcelona.

Leikin, R. (2009). «Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks», en R. Leikin, A. Berman, y B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. Sense Publisher, 129-145. <http://dx.doi.org/10.1163/9789087909352_010>.

Martínez-Juste, S., J. M. Muñoz-Escolano y A. M. Oller-Marcén (2015), «Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta», en C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX,* SEIEM, Alicante, 351-359.

Rubio-Chueca, J. M., J. M. Muñoz-Escolano y P. Beltrán-Pellicer (2021), «La probabilidad en problemas de Olimpiadas matemáticas de secundaria en España», *Contextos Educativos*, 28, 29-50.

Toh, T. L. (2013), «Mathematics Competition Questions and Mathematical Tasks for Instructional Use», En B. Kaur (Eds.), *Nurturing Reflective Learners in Mathematics: Yearbook 2013,* World Scientific, AME, Singapore, 189-207.

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Enero de 2024
ISSN: 2386-8821e