

Análisis de fotografías lunares. Cálculo de alturas y datación de superficies planetarias

por

JULIO BERNUÉS PARDO Y MIGUEL ÁNGEL CRESPO MIR

(IUMA, Universidad de Zaragoza)

En este taller se proponen dos actividades que se pueden realizar analizando fotografías lunares. Por un lado, el cálculo de la altura de las paredes de los cráteres, conociendo el tamaño de la sombra proyectada. Y por otro, la datación de superficies planetarias por la técnica de conteo de cráteres, que es el método que se usa para determinar la antigüedad de una zona concreta que se desea estudiar. En este taller se describen los métodos de trabajo con un ejemplo y se propone como ejercicio la datación de otras regiones de la cara visible de la Luna.

Introducción

El punto de partida de muchos de los trabajos de los geólogos planetarios son las fotografías. Esto es debido a que normalmente, son los primeros datos que se obtienen de un planeta o un satélite. A través de un estudio detallado de estas imágenes se pueden identificar estructuras y rasgos significativos que nos permitan hacer unas primeras hipótesis acerca de los procesos que los han podido originar y, de esta manera, intentar reconstruir, más o menos, su historia.

La importancia de las fotografías se pone todavía más de manifiesto cuando se pretende mandar una sonda espacial a algún cuerpo de nuestro Sistema Solar. Los científicos de la NASA pasaron mucho tiempo analizando fotografías hasta que se decidieron por los sitios de alunizaje del programa Apolo, atendiendo a la seguridad, en este caso, de los astronautas y al interés científico. En este artículo pretendemos mostrar algunas de las posibilidades que ofrecen las imágenes que tenemos a nuestra disposición. En el caso de la Luna, que es el caso que nos ocupa, la interpretación o análisis fotográfico puede ayudarnos, por un lado, a buscar más información sobre lo que estamos viendo y, por otro, nos permite avanzar notablemente en nuestras observaciones.

Aquí se describirán unos métodos de investigación usados desde el principio de la exploración del Sistema Solar. Lo único necesario son algunas imágenes planetarias, y un poco de paciencia. El objetivo es hallar las alturas de las paredes de los cráteres y la edad de la superficie de una región de la Luna, uno de los cuerpos mejor estudiado del Sistema Solar. Gracias al programa Apolo y a los Lunar Orbiter (sondas no tripuladas) hay muchos datos e imágenes de la Luna que hoy están disponibles *online*. Durante años, sobre todo en los sesenta y setenta, se dedicó un gran esfuerzo a intentar comprender el origen y la historia de nuestro satélite, y este método de datación es una consecuencia de ello. En la actualidad los científicos la están usando con las imágenes de Marte.

Las técnicas que se describen requieren de un cierto grado de manipulación numérica, y aunque para llevarla a cabo baste con una calculadora con funciones logarítmicas y trigonométricas, no parecen adecuadas para alumnos de niveles inferiores al bachillerato. Aunque, con la guía adecuada es posible realizarla también en los cursos superiores de la ESO.

Cálculo de alturas

Un poco de matemáticas

¿Qué podemos hacer con una fotografía de la Luna? Lo cierto es que existen muchas y variadas posibilidades. Lo primero, podría ser identificar las distintas características del relieve lunar, y después, si somos un poco más curiosos, podemos hacer algunos pequeños cálculos como los que se indican a continuación para averiguar la altura de las paredes de los cráteres, conociendo el tamaño de la sombra proyectada.

Este tipo de cálculos es presentado muy a menudo como una actividad escolar debido a su relativa sencillez y a su gran valor didáctico. El alumno va a comprobar la gran cantidad de información que se puede obtener a través de las fotografías, se le va a obligar a agudizar el ingenio y va a manejar algo de geometría, por lo que el profesor quedará más que satisfecho. Además, si se acompaña con algún modelo de cráter, previamente confeccionado, será posible jugar cambiando la incidencia de la luz sobre la maqueta y verificando que los cálculos seguirán siendo válidos aunque el tamaño de la sombra varíe con los distintos ángulos probados.

La profundidad de un cráter puede ser determinada fácilmente si conocemos la longitud de la sombra proyectada y el ángulo de incidencia de la luz sobre el cráter. En este caso, la altura del Sol visto desde la formación que queremos medir. La relación matemática únicamente implica unos conocimientos elementales de trigonometría, y es la siguiente:

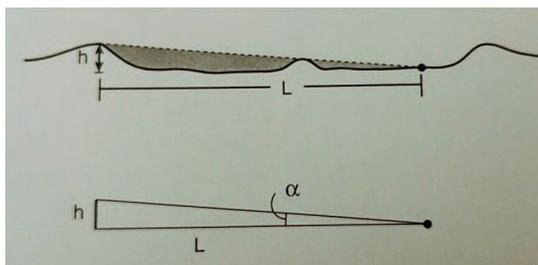
$$h = L \cdot \tan a$$

donde,

h es la profundidad del cráter.

L es la longitud de la sombra.

a es el ángulo de la altura del Sol sobre el horizonte lunar.



La medida de la sombra podemos darla en relación al tamaño del cráter. Lo normal es que tengamos información del tamaño del cráter o que la podamos determinar mediante su tamaño angular. La medida que tomemos sobre la fotografía de la sombra, que será en centímetros o milímetros, la podemos transformar mediante una sencilla regla de tres, a kilómetros, obteniendo de esta manera el resultado directamente y poder compararlo con las medidas conocidas. Por ejemplo, conociendo que el diámetro de un cráter es de 50 km y en la fotografía mide 2 cm, y que proyecta una sombra de 1 cm, esto equivaldría a que la sombra tiene una longitud de 25 km. Para conocer el ángulo de incidencia del Sol sobre la formación que queremos realizar los cálculos es imprescindible que la fotografía venga acompañada de datos que nos permitan deducirla. Normalmente, suelen dar la colongitud selenográfica del Sol, que es la posición precisa del terminador en el ecuador lunar (la nomenclatura se corresponde con 0 grados, cuando está en cuarto creciente, 90 para la Luna llena, 180 para cuarto decreciente y 270 para la Luna nueva). Asimismo, es imprescindible conocer la latitud y longitud selenográfica para poder calcular el ángulo que tiene el Sol sobre la formación que queremos realizar los cálculos. La mayor parte de los artículos a los que hemos tenido acceso únicamente consideran el cálculo de las alturas en las zonas próximas al terminador y cuando la Luna se encuentra próxima a algunos de los cuartos, bien creciente o decreciente y en zonas próximas al ecuador lunar. En cierta manera es lógico ya que para otros casos las relaciones matemáticas se complican bastante, aunque hay que decir que es posible realizar los cálculos si se es cuidadoso. En estos casos la verdadera complejidad consiste en tener fotografías con la suficiente calidad y con los datos necesarios.

Ejemplo práctico

Los datos que tenemos en este ejemplo son los diámetros de los cráteres, así como su longitud y latitud, que se aportan en la tabla 1. Por otro lado, la colongitud selenográfica del Sol. Este dato nos ayudará a obtener un valor suficientemente preciso de la distancia del cráter al terminador conociendo su longitud y la colongitud lunar en el momento de tomar la fotografía, ambos datos catalogados en tablas. La colongitud se puede entender como la distancia en grados que separa al terminador occidental del meridiano central (0°).

	<i>Aristillus</i>	<i>Autolycus</i>	<i>Archimedes</i>	<i>M. Pito</i>
	33,9 N 1,2 E	30,7 N 1,5 E	29,7 N 4 W	41 N 1 W
Diámetro	55 km	39 km	83 km	25 km
Longitud sombra	31,43 km	28,74 km	8,9 km	19,5 km
Altura Sol	6° 37' 56"	6° 32' 6"	12° 12' 40"	7° 14' 43"
Cálculo profundidad	3,654 km (3,650)	3,300 km (3,430)	1,920 km (2,150)	2,400 km (2,250)

Tabla 1

Datos de la fotografía:

Cassini 57 km

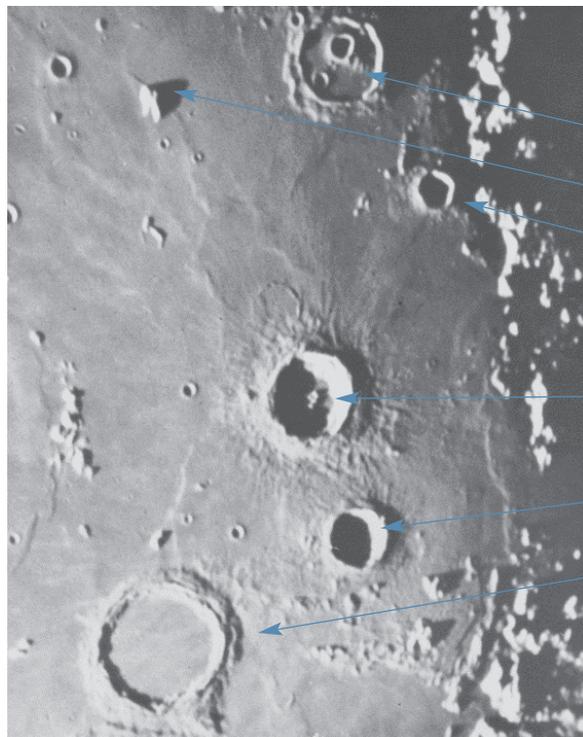
Mon.s Piton

Theaetetus 25 km

Aristullus 55 kmm

Autolycus 39 km

Archimedes 83 km



Colongitud del Sol = 171,4
Longitud terminador = 180 - 171,4 = 8,6 E

Cuando la colongitud es mayor a 90° significa que la Luna comenzó a cubrirse nuevamente (cuarto menguante), y la posición del terminador Lt (en grados de longitud lunar) está dada por la ecuación:

$$Lt(\text{grados}) = \text{colong} + 180^\circ$$

Cabe aclarar que el terminador que comenzamos a ver en este caso es el oriental.

Son cuatro los casos posibles que podemos encontrar a la hora de calcular la distancia en grados desde algún cráter al terminador:

- Cuando la colongitud es mayor a 90° y consideramos longitudes oeste de cráteres, la distancia al terminador viene dada por: $Lt(\text{grados}) = \text{long}(\text{grados}) + 360^\circ - (\text{colong}(\text{grados}) + 180^\circ)$.
- Cuando la colongitud es mayor a 90° y consideramos longitudes este de cráteres, la distancia al terminador viene dada por: $Lt(\text{grados}) = 360^\circ - \text{long}(\text{grados}) - (\text{colong}(\text{grados}) + 180^\circ)$.
- Cuando la colongitud es menor a 90° y consideramos longitudes oeste de cráteres, la distancia al terminador viene dada por: $Lt(\text{grados}) = \text{colong}(\text{grados}) - \text{long}(\text{grados})$.
- Cuando la colongitud es menor a 90° y consideramos longitudes este de cráteres, la distancia al terminador viene dada por: $Lt(\text{grados}) = \text{colong}(\text{grados}) + \text{long}(\text{grados})$.

En estas cuatro ecuaciones, el término «long» hace referencia a la longitud del cráter (análoga a la de las coordenadas geográficas y medida en grados) tabulada en los atlas lunares.

Aquí habría que hacer una pequeña corrección que tiene que ver con la latitud si esta se aleja mucho de la zona ecuatorial. En este caso la hemos tenido en cuenta y los datos son los que se muestran en la tabla, los datos entre paréntesis son los reales tomados de los datos oficiales.

Contando cráteres: datación de superficies planetarias

El fundamento teórico

El recuento de cráteres es un método que permite estimar la edad de la superficie de un planeta. La idea principal es que estudiando la densidad y el tamaño de los cráteres se puede deducir la antigüedad de una zona determinada.

La existencia de superficies con distintas densidades de cráteres, ha llevado a pensar que el flujo de impactos (la cantidad de cuerpos que han colisionado en un planeta por unidad de tiempo) no es aleatorio, sino que ha decrecido de manera exponencial a lo largo del tiempo. Es sabido que muchos fenómenos físicos en los que interviene la estadística siguen patrones de este tipo. Otra evidencia que podremos observar, es que al parecer hay mayor cantidad de cráteres pequeños que grandes, y de hecho la frecuencia de craterización en función del tamaño es también una exponencial decreciente. Por otro lado, hay que destacar que este método de contaje de cráteres ha sido calibrado con las muestras recogidas en la Luna por el programa Apolo.

Metodología de trabajo

Algunas consideraciones previas a tener en cuenta: los datos obtenidos darán una curva exponencial, por lo que se calcularán los logaritmos decimales de estos, para obtener una recta y que resulte más fácil obtener información. La fotografía a estudiar tendrá que indicar el tamaño de algún cráter para poder hacer los cálculos que se indican a continuación.

- Calcular el área A de la zona a estudiar, para poder calcular las densidades de craterización.
- Anotar y localizar todos los cráteres mayores de 5 km.
- Agruparlos por tamaños. A partir de 5 km, al doble de su superficie, es decir, de 5 a 7, de 7 a 10, de 10 a 14...
$$A = \pi r^2 \rightarrow 2A = \pi R^2 \rightarrow 2\pi r^2 = \pi R^2 \rightarrow R = r\sqrt{2}$$
siendo Da ($2r$), el diámetro menor, y Db ($2R$), el diámetro mayor del cráter de cada grupo.
- Confeccionar una tabla por grupos de mayor a menor, véase ejemplo (tabla 2).
- Calcularemos el número acumulativo, Nc , que es el número de cráteres con diámetro mayor o igual que el Da de cada grupo, es decir, que sumamos los cráteres de ese grupo con los de los grupos de diámetro superior.
- El número acumulativo, Nc , en cada grupo, lo dividiremos por el área A .
- Elaboraremos una gráfica, a poder ser sobre papel milimetrado, donde pondremos en el eje horizontal, $\log(Da)$ y el eje vertical $\log(Nc/A)$.
- Una vez obtenidos los puntos, se ajustarán a una recta, bien de modo aproximado (manualmente) o estadísticamente (ajuste de mínimos cuadrados).
- Una vez obtenida la recta, se calcula gráficamente o con la ecuación de ajuste, el denominado Índice de zona, que se corresponde con el valor de 25 km de diámetro, es decir el $\log(25) = 1,40$, en la ordenada. La ecuación que se da está ajustada para este valor.
- El valor del Índice de zona se sustituye en la ecuación $Edad = 1000 \cdot (1,59 \cdot \text{Índice} + 10,61)$ y el valor que se obtiene es en millones de años. Esta relación se ha determinado realizando contajes y usando los valores obtenidos por datación radiométrica de las rocas recogidas en el programa Apolo. La obtención de la ecuación no es difícil, pero requiere un trabajo bastante meticuloso de comparación de datos, por lo que se proporciona para poder utilizarla en el taller.

Datemos el área de alunizaje del Apolo 15

La fotografía usada anteriormente para el cálculo de alturas es la que vamos a utilizar. La zona está en el Mare Imbrium y se distinguen claramente los cráteres Cassini, Aristillus y Archimedes, entre otros. Esta zona es próxima a donde alunizó el Apolo 15. En la imagen se aportan datos del diámetro de alguno de los cráteres, lo que nos va a permitir poder calcular el área de la fotografía en el caso de que no nos la den.

Estableceremos un plan de trabajo, por ejemplo, dividir la imagen en cuadrículas, si hay muchos cráteres. Ahora pasaremos a medir los cráteres, hay que ser cuidadosos, y las medidas deben ser precisas y repetibles; en caso de obtener varios valores, se puede hacer una media. Es útil marcar los bordes con un lápiz de punta fina y realizar la medición. Es posible que a veces los cráteres no tienen bien definidos los bordes y puede ser necesario consensuar cómo se debe hacer.

Hay que calcular el área total. En esta imagen se obtiene un valor aproximado de unos 190 000 km² (el valor está redondeado, esto no altera el resultado final y facilita los cálculos).

A continuación se confecciona una lista con todos los cráteres de diámetro mayor a 5 km, anotando los tamaños de cada uno. Hay que ser cuidadosos considerando únicamente las estructuras que de forma clara sean circulares, para evitar confusiones con otras formaciones que podrían confundirse con cráteres y no lo son.

En la tabla 2 se muestran los grupos de cráteres ordenados de mayor a menor diámetro y el número de cráteres que hay en cada grupo.

Grupo	Diámetro Da (km)	Diámetro Db (km)	Número cráteres
1	80	112	1
2	56	80	1
3	40	56	1
4	28	40	1
5	20	28	1
6	14	20	1
7	10	14	2
8	7	10	5
9	5	7	4

Tabla 2

Ahora pasaremos a elaborar la siguiente tabla para lo que será necesario tener una calculadora capaz de resolver logaritmos, procediendo de la siguiente manera:

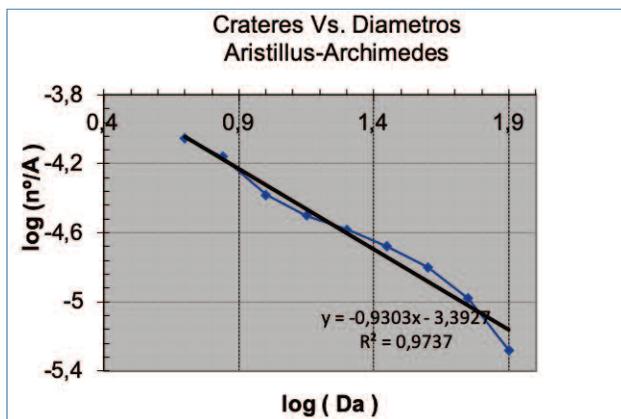
La x del primer punto es $\log(80)$ y la y es $\log(1/A)$, donde A es el área calculada antes; el segundo punto tiene $x = \log(56)$ e $y = \log(2/A)$ (el número de cráteres de diámetro mayor o igual que 56 es 2: uno del grupo 2 y otro del grupo 1). Estos datos componen la siguiente tabla.

Grupo	x Log(Da)	Nc Acumulativo	y $\log(Nc/A)$
1	1,90	1	-5,28
2	1,75	2	-4,98
3	1,60	3	-4,80
4	1,45	4	-4,68
5	1,30	5	-4,58
6	1,15	6	-4,50
7	1,00	8	-4,38
8	0,84	13	-4,16
9	0,70	17	-4,05

Tabla 3

Para obtener el índice de zona se pueden representar los puntos en papel milimetrado. La escala en los ejes debe permitir representar el segundo decimal. El paso posiblemente más delicado de la datación sea encontrar una recta que pase lo más cerca posible de todos los puntos. Existen métodos matemáticos para hacerlo (como el de los mínimos cuadrados, que es el que hemos utilizado por ser mas preciso) aunque si se es cuidadoso se puede trazar una recta aproximada que nos permitirá un cálculo aproximado. Una vez hecho esto se obtendrá el índice de la imagen, o sea la ordenada de $x = \log(25) = 1,40$.

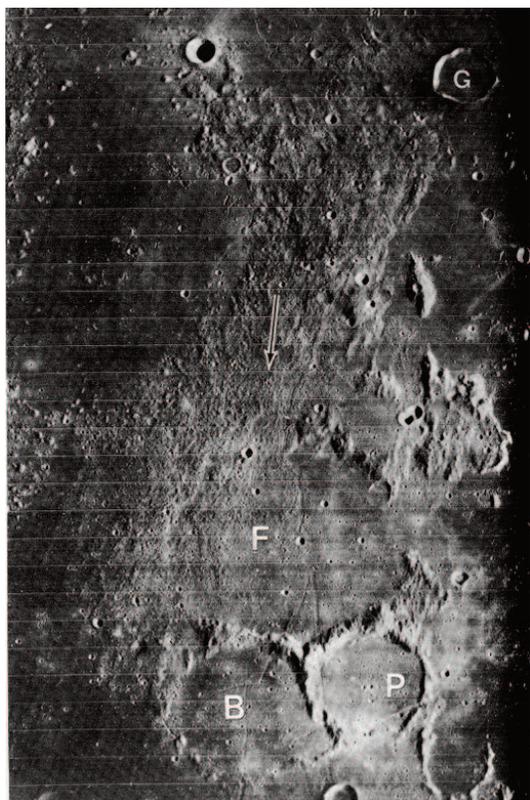
Este es el gráfico resultante de este ejemplo. El índice resultó ser $-4,695$.



Sustituyendo este valor en la ecuación de la edad, $Edad = 1000 \cdot (1,59 \cdot \text{Indice} + 10,61)$ obtenemos que la imagen estudiada tiene una antigüedad aproximada de 3 145 millones de años.

Ejercicios propuestos y sus soluciones

Finalmente, se proponen otras dos imágenes para practicar el método. Una de ellas es la zona de Fra Mauro donde alunizó el Apolo 14, y la otra es una zona mucho más joven, donde alunizó el Apolo 12, al lado del cráter Copérnico.



Datos de las imágenes

Izquierda: Fra Mauro, la flecha indica el punto donde alunizó el Apolo 14.
Los cráteres más destacados son Fra Mauro (F; 95 km), Bonpland (B; 60 km), Parry (P; 48 km), y Gambart (G; 25 km).

Derecha: Copérnico, la flecha indica el punto de alunizaje del Apolo 12.
Los cráteres más destacados son Copérnico (C; 93 km), Reinhold (R, 43 km) y Lansberg (L; 39 km)

Las soluciones son:

Fra Mauro : el índice es $-4,22$ y la edad 3 900 millones de años.

Copérnico : el índice es $-4,66$ y la edad 3 200 millones de años.

Estas fotografías de la Luna están en el libro de Don Wilhelms *The geologic history of the Moon*, publicado en 1987 por el Servicio Geológico de Estados Unidos como el número 1348 de la serie Professional Papers. La usada en el ejemplo es del libro *CRATERS!*.

Referencias bibliográficas

- ANGUITA, J., y M. A. DE LA CASA (1995), «Contando Cráteres», *Enseñanza de las Ciencias de la Tierra*, vol 3, n.º 2, 106-110. <<https://raco.cat/index.php/ECT/article/view/88186/141676>>.
- BALWIN, R. B. (1987), «On the relative and absolute age of seven lunar front face basins, II: From crater counts», *Icarus*, 71, 19-29.
- CRATER ANALYSIS WORKING GROUP (1978), *Standard techniques for presentation and analysis of crater size-frequency data*, NASA Techn. Memo. 7930, 20p.
- HARTMANN, W. K., y J. CAIN (1995), *CRATERS!, A Multi-Science Approach to Cratering and Impacts*, National Science Teachers Association, The Planetary Society and NASA.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza), Daniel Sierra Ruiz (CPI El Espartidero, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital trimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciuelos@gmail.com>

Blog: <<http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>>

Twitter: @SAPMciuelos



Julio de 2025
ISSN: 2386-8821e

