Matemática financiera en 1.º de Bachillerato. ¿A mano o a máquina?

por
Claudio Martínez Gil y Miguel Fernández Rodríguez
(IES Benjamín de Tudela, Tudela)

La Matemática Financiera es una parte de la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las CCSS I que debemos de intentar abordar de la manera más realista posible.

Resulta fundamental que el alumno entienda qué es un capital financiero, como capital asociado a un instante de tiempo dado, para lo cual el concepto matemático de «interés compuesto» resulta fundamental. Este interés compuesto tomará la forma de tipo de interés, inflación, tasa de descuento…

Este es el momento ideal para que los estudiantes comprendan cómo funcionan las hipotecas, los planes de ahorro y los depósitos a plazo fijo. Esto les da herramientas para tomar decisiones informadas en el futuro.

Intentamos en este artículo poner de relieve las formas que tendríamos de abordar este tema. Pero en vez de hacer una posible programación de aula vamos a ejemplificar con el siguiente problema práctico (simplificado), que es posiblemente el problema más típico de este tema:

> Voy a comprar un piso, para lo que pido un préstamo a un banco. Necesito 120 000 euros y negocio con el banco un tipo de interés nominal anual del 4 %, a pagar en 20 años a través de cuotas mensuales fijas (método francés). Me gustaría saber la cuota mensual que he de pagar y tener el cuadro de amortización del préstamo."

A mano

Aunque en cualquier libro podemos encontrar despejada la cuota mensual en función del número de periodos (240), del tipo de interés anual (0,04) y los 120 000 euros que pedimos, es interesante que el alumno vea cómo se actualiza cada una de las cuotas mediante el interés compuesto.

Al final resulta la suma de 240 términos de una progresión geométrica, para lo que tenemos la fórmula correspondiente. Para facilitar los cálculos a mano consideramos $i = 0{,}04/12$. Podemos hacer la igualación al principio del periodo o al final (mejor al final) para lo que tendremos:

$$C(1+i)^n = x\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Sustituyendo los valores numéricos la cuota mensual es $x = 727{,}18$ euros. No parece ni aconsejable ni pedagógico que el alumnado haga el cuadro de amortización a mano. Son multiplicaciones, sumas y restas…

Con una hoja de cálculo

No resulta difícil «programar» en una hoja de cálculo el cálculo de la cuota y el cuadro de amortización. Insertamos captura (figura 1) de los 10 primeros periodos y de los 5 últimos para poder comparar con lo obtenido con otros medios tecnológicos. Puede verse la hoja de cálculo completa en este enlace.

Datos del préstamo	
Principal	120000
Tasa anual	0.04
Plazo	240
Cuota mensual	727.18

Mes		Cuota mensual	Intereses	Principal	Capital vivo
0					120000
1	120000	727.18	400	327.18	119672.82
2	119672.82	727.18	398.91	328.27	119344.55
3	119344.55	727.18	397.82	329.36	119015.19
4	119015.19	727.18	396.72	330.46	118684.73
5	118684.73	727.18	395.62	331.56	118353.17
6	118353.17	727.18	394.51	332.67	118020.50
7	118020.50	727.18	393.4	333.78	117686.72
8	117686.72	727.18	392.29	334.89	117351.83
9	117351.83	727.18	391.17	336.01	117015.82
10	117015.82	727.18	390.05	337.13	116678.69
11	116678.69	727.18	388.93	338.25	116340.44
234	5021.75	727.18	16.74	710.44	4311.31
235	4311.31	727.18	14.37	712.81	3598.50
236	3598.50	727.18	12	715.18	2883.32
237	2883.32	727.18	9.61	717.57	2165.75
238	2165.75	727.18	7.22	719.96	1445.79
239	1445.79	727.18	4.82	722.36	723.43
240	723.43	727.18	2.41	724.77	-1.34

Figura 1

Observamos que en el capital vivo, al final del último periodo es −1,24. Obviamente deberíamos de tener 0. Esto es debido a la mecanización «exacta» de la hoja de cálculo. Pero puede ser un buen momento para hablar al alumnado del principio de importancia relativa en contabilidad, según el cual las cuentas no tienen que ser completamente exactas siempre que no se pierda de vista el objetivo perseguido.

Con un simulador del Banco de España

En la *web* del Banco de España hay simuladores para casi todo. Con una página de entrada titulada: «Simuladores: calcula la cuota, la rentabilidad, la TAE y mucho más» el Banco de España ofrece la posibilidad de que cualquier persona haga sus cálculos.

Simplemente hemos de tener cuidado y elegir bien el simulador. En este enlace podemos acceder al simulador adecuado. Como antes, ponemos los 10 primeros periodos y los 5 últimos (figura 2).

PORTALCLIENTEBANCARIO
BANCO DE ESPAÑA
SIMULADORES

Tabla de Amortización Calculada

Préstamo1

N° Meses	Tipo Interés	Cuota	Amortizado	Intereses	Capital Pendiente
0	0,00%	0,00 €	0,00 €	0,00 €	120.000,00 €
1	4,000 %	727,180 €	327,180 €	400,000 €	119.672,820 €
2	4,000 %	727,180 €	328,270 €	398,910 €	119.344,550 €
3	4,000 %	727,180 €	329,360 €	397,820 €	119.015,190 €
4	4,000 %	727,180 €	330,460 €	396,720 €	118.684,730 €
5	4,000 %	727,180 €	331,560 €	395,620 €	118.353,170 €
6	4,000 %	727,180 €	332,670 €	394,510 €	118.020,500 €
7	4,000 %	727,180 €	333,780 €	393,400 €	117.686,720 €
8	4,000 %	727,180 €	334,890 €	392,290 €	117.351,830 €
235	4,000 %	727,180 €	712,810 €	14,370 €	3.598,500 €
236	4,000 %	727,180 €	715,180 €	12,000 €	2.883,320 €
237	4,000 %	727,180 €	717,570 €	9,610 €	2.165,750 €
238	4,000 %	727,180 €	719,960 €	7,220 €	1.445,790 €
239	4,000 %	727,180 €	722,360 €	4,820 €	723,430 €
240	4,000 %	725,840 €	723,430 €	2,410 €	0,000 €

Volver

Figura 2

Observamos que este simulador acaba con capital vivo de 0. Esto es debido a que está programado para que la última cuota no sea exactamente la misma que las anteriores sino la precisa para que la última casilla del capital pendiente sea nula.

Con Mathematica

También hemos hecho los cálculos con el software privativo Mathematica, que pone a nuestra disposición una plataforma *web* con múltiples funciones gratuitas.

Aquí también, en la figura 3, damos una serie de capturas y ponemos el enlace al pdf en el que está hecho el cuadro de amortización de forma completa.

a) Calcula la mensualidad constante

```
In[1]:= C0 = 120 000
Out[1]= 120 000

In[2]:= n = 240
Out[2]= 240

In[5]:= i = 0.04 / 12
Out[5]= 0.00333333
```

El término amortizativo constante anual:

In[6]:= $\text{Solve}\left[C0\,(1+i)^{n} == a0\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i},\ a0\right]$

```
Out[6]= {{a0 → 727.176}}
```

b) Cuadro de amortización del préstamo

```
In[7]:= Clear[CA, II, M, A]

In[8]:= a0 := 727.1763951592874`
        CA[0] := C0; M[0] := 0; II[0] := 0; A[0] := 0
        II[1] := i * CA[0]; A[1] := a0 - II[1]; M[1] := M[0] + A[1]; CA[1] := CA[0] - A[1]
        A[k_] := A[1] * (1 + i)^(k-1)
        II[k_] := a0 - A[k]
        M[k_] := A[1] * ((1 + i)^k - 1)/i
        CA[k_] := C0 - M[k]

In[15]:= Print["k          a          I          A          M          C"]
         Print["0          0          0          0          0          ", CA[0]]
         Do[Print[k, "    ", a0, "      ", II[k], "      ", A[k], "      ", M[k], "      ", CA[k]], {k, 1, n}]
```

k	a	I	A	M	C
0	0	0	0	0	120 000
1	727.176	400.	327.176	327.176	119 673.
2	727.176	398.909	328.267	655.443	119 345.
3	727.176	397.815	329.361	984.805	119 015.
4	727.176	396.717	330.459	1315.26	118 685.
5	727.176	395.616	331.561	1646.82	118 353.
6	727.176	394.511	332.666	1979.49	118 021.
7	727.176	393.402	333.775	2313.26	117 687.
8	727.176	392.289	334.887	2648.15	117 352.
235	727.176	14.3754	712.801	116 400.	3599.8
236	727.176	11.9993	715.177	117 115.	2884.63
237	727.176	9.61542	717.561	117 833.	2167.07
238	727.176	7.22355	719.953	118 553.	1447.11
239	727.176	4.82371	722.353	119 275.	724.761
240	727.176	2.41587	724.761	120 000.	-1.45519×10^{-11}

d) Amortización anticipada (1)

Figura 3

Conclusiones

Tanto en nuestra hoja de cálculo como en el simulador del Banco de España tenemos el siguiente gráfico (figura 4) en el que visualizamos la evolución de la cuota y de las partes de la misma que van al pago de intereses y a la amortización del capital principal.

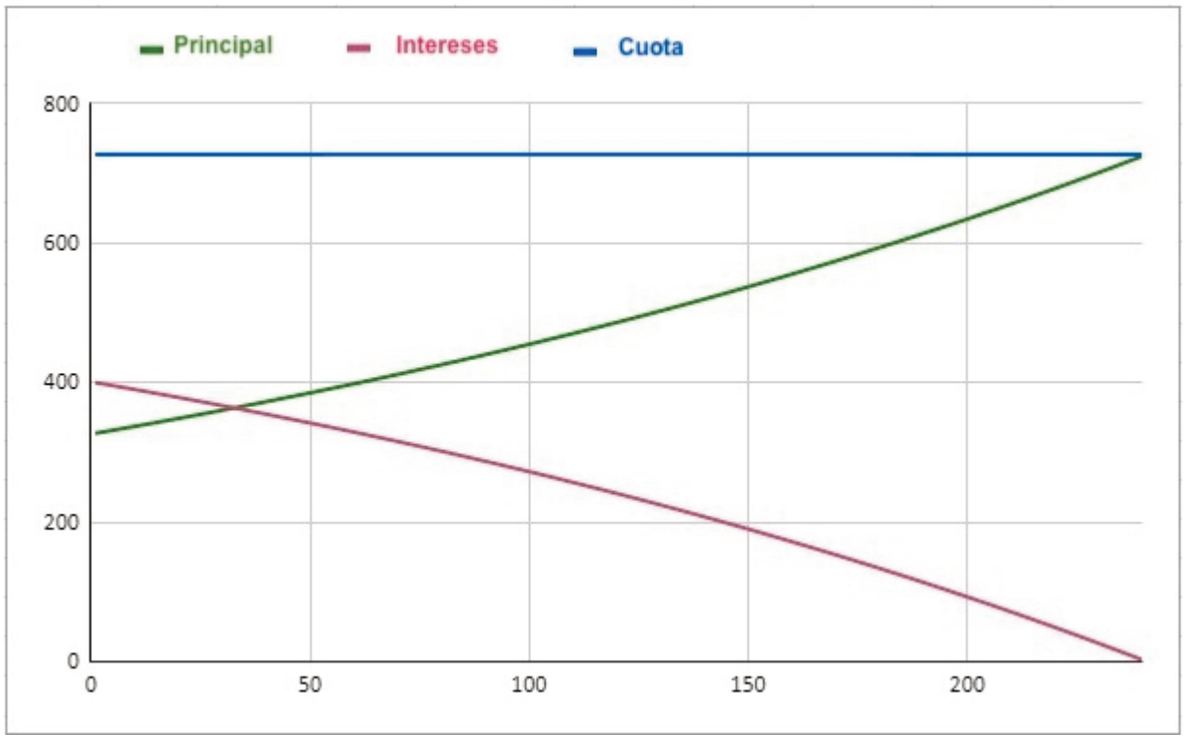

Figura 4

Parece bastante claro que habría que hacer un par de problemas de este tipo «a mano» para después mecanizar el proceso ya sea con hoja de cálculo, el simulador o con Mathematica. La elección de una herramienta u otra ha de ser a gusto del estudiante o del profesor.

Y una consideración más. En la fórmula:

$$C(1+i)^n = x\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

no tenemos problemas para despejar la cuota si conocemos C, i, n, como hemos visto. Tampoco para hallar C. Si la incógnita es n tenemos una ecuación logarítmica que podremos resolver. Si la incógnita es i es muy posible que necesitemos un método numérico para resolver. En el simulador del Banco de España se calcula mecánicamente y con Mathematica utilizaremos el comando FINDROOT.

Recursos bibliográficos

BONILLA, M., y A. IVARS (1994), *Matemática de las operaciones financieras*, Ed. AC, Madrid.
BONILLA, M., A. IVARS e I. MOYÁ (2006), *Matemática de las operaciones financieras*, Ed Thomson, Madrid.
CRUZ, S., y M. C. VALLS (2009), *Introducción a las Matemáticas Financieras*, Ed. Pirámide, Madrid.
MEZA, O. (2017), *Matemáticas Financieras Aplicadas*, Ecoe Ediciones, Bogotá.
MINER, J. (2008), *Curso de Matemática Financiera*, Ed. McGraw-Hil,. Madrid.