Introducción al principio de inducción con las Torres de Hanói

por
Cantia Belloso Casuso
(IES Mariana Pineda, Madrid)

Las matemáticas se han de transmitir siempre teniendo en cuenta su utilidad. En este sentido, son una herramienta fundamental para pensar de manera lógica, analizar problemas y descubrir patrones que se repiten en el mundo que nos rodea. Entre los muchos conceptos importantes que ofrece esta disciplina, el principio de inducción destaca por su capacidad para demostrar propiedades de manera sistemática y general, aplicándose a todos los números naturales sin tener que verificarlos uno por uno.

Para acercar esta idea a estudiantes de secundaria, resulta muy útil recurrir a ejemplos concretos y visuales. Uno de ellos es el rompecabezas de las Torres de Hanói. A pesar de su aparente simplicidad, este juego esconde patrones matemáticos curiosos que se vuelven cada vez más complejos a medida que aumenta el número de discos con los que se juega.

Así, el vínculo entre este rompecabezas y el principio de inducción es natural: al observar cómo se resuelve el problema con pocos discos, podemos descubrir un patrón aplicable para cualquier cantidad de discos. Esto permite a los estudiantes ver cómo la lógica matemática puede aplicarse de manera práctica.

Este artículo tiene como objetivo guiar al alumnado de Educación Secundaria en la comprensión del principio de inducción a través de un enfoque visual y lúdico, utilizando las Torres de Hanói. Con ello, se espera no solo la comprensión de un importante concepto matemático, sino el descubrimiento de patrones y la resolución de problemas paso a paso de manera original, creativa y lógica.

Desarrollo de los contenidos

Principio de inducción

El principio de inducción matemática es una técnica empleada para demostrar que una afirmación se cumple para todos los números naturales (1, 2, 3,…). Por poner una similitud, la idea principal de la inducción matemática es similar a un efecto dominó: si logras derribar la primera ficha y demuestras que cada ficha derriba a la siguiente, entonces todas las fichas caerán. El proceso de inducción tiene dos pasos fundamentales (Fomin y otros, 2012):

— Paso base: Se verifica que la afirmación sea cierta para el primer número natural (generalmente el 1). Este paso se asemejaría a asegurarse de que la primera ficha del dominó está correctamente colocada.
— Paso inductivo: Se asume que la afirmación es cierta para un número arbitrario n y luego se demuestra que también es cierta para $n+1$. Si esto se cumple, entonces, por el principio de inducción, la afirmación es válida para todos los números naturales a partir del primero.

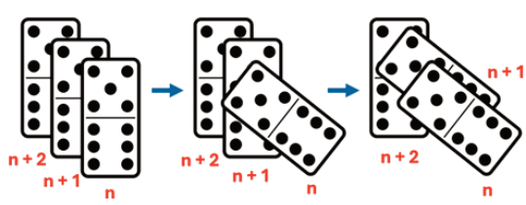

Figura 1. Analogía del principio de inducción utilizando las fichas de dominó

Un ejemplo que se suele indicar para explicar los pasos mencionados es que la suma de los primeros n números naturales es:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esto se verifica inicialmente para $n = 1$, la suma es 1, y con la fórmula también se obtiene 1. Luego, se asume que la fórmula funciona para $n = k$ y se demuestra que para $n = k + 1$ también se cumple. De esta manera, el principio de inducción nos permite extender la validez de una afirmación a todos los números naturales sin tener que revisarlos uno por uno (Ruiz, 2009).

En resumen, el principio de inducción es una herramienta muy útil que permite generalizar resultados a partir de un patrón base, fomentando el razonamiento lógico y la comprensión profunda de los números y sus relaciones.

Torres de Hanói

Las Torres de Hanói, también conocidas como Torre de Brahma, es un rompecabezas matemático inventado por el matemático francés Édouard Lucas en 1883 (Aznar, s. f.).

El juego consiste en tres postes verticales y varios discos de diferentes tamaños, todos con un agujero en el centro que les permite deslizarse sobre los postes.

Al inicio, los discos se encuentran apilados en un solo poste, organizados de mayor a menor tamaño de abajo hacia arriba. El objetivo es trasladar toda la pila a otro poste, siguiendo reglas muy precisas (Lucas, 1979):

— Solo se puede mover un disco a la vez.
— No está permitido colocar un disco más grande encima de uno más pequeño.
— Únicamente puede moverse el disco que se encuentra en la parte superior de cada pila.

Figura 2. Édouard Lucas (Aznar, s. f.)

Figura 3. Posición inicial del rompecabezas de las Torres de Hanói con 4 discos

Además de su atractivo como desafío lógico, puede resultar interesante para el alumnado plantear el rompecabezas a partir de la historia legendaria inventada por Lucas. Según el creador del juego, el origen de este rompecabezas surge en un templo sagrado en el cual se encuentran tres varillas de diamante sobre las cuales descansan 64 discos de oro. En este contexto, a los sacerdotes del lugar se les encomienda la tarea de trasladar los discos de una varilla a otra, uno por uno y siempre siguiendo las reglas ya mencionadas. La leyenda afirma que, cuando se complete la tarea, el mundo llegará a su fin (Lucas, 1979).

Cabe destacar que, aunque es solo un mito creado para popularizar el juego, esta historia ha quedado ligada al rompecabezas y ha fomentado su fama hasta la actualidad.

Propuesta para el aula

El rompecabezas de las Torres de Hanói puede llevarse al aula ya que es una herramienta muy interesante para trabajar diferentes conceptos matemáticos. Parte de su interés de cara al aprendizaje significativo radica en el hecho de que es un juego que puede ser fácilmente construido de manera manipulativa por el alumnado, gracias a lo cual el desarrollo y análisis posterior puede hacerse de una manera más práctica. Para ello, pueden emplearse materiales como cartón, pinturas, cartulinas de colores, plastilina, palillos de madera, goma EVA…

Así, puede construirse un juego de mesa consistente en tres ejes verticales introducidos en una base horizontal y varios anillos con diferentes diámetros exteriores que se sitúan inicialmente en uno de estos ejes verticales.

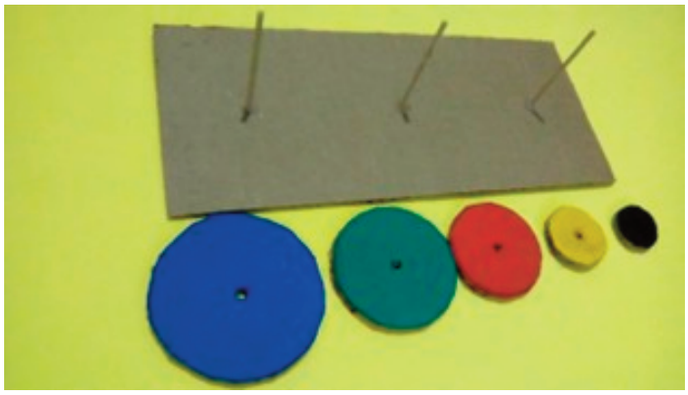

Figura 4. Rompecabezas de las Torres de Hanói casero (López, 2017)

Antes de comenzar con el juego, hay que recordar que está permitido mover el anillo que se encuentre más alto, es decir, el menor de un eje cualquiera a otro teniendo en cuenta la restricción de que no es posible colocar un anillo sobre otro que sea más pequeño.

De este modo, se pretende que el alumnado sea capaz de demostrar diferentes aspectos en el caso de disponer de una cantidad n de anillos (Fomin, 2012):

— Es posible llevar todos los anillos a uno de los ejes libres.
— Es posible hacerlo en $2n-1$ movimientos.
— Hoy no es posible hacerlo en menos movimientos.

Antes de intentar calcular cuántos movimientos son necesarios para completar el juego, o de analizar problemas combinatorios que se derivan de él, lo primero es contar con un procedimiento que efectivamente resuelva el rompecabezas y, además, poder asegurar que dicho procedimiento es el más eficiente posible. Para ello, algunos autores han desarrollado el siguiente teorema (Gil y otros, 2011):

El método que utiliza la menor cantidad de movimientos para trasladar una torre de n discos desde la primera varilla hasta la tercera se describe de manera recursiva de la siguiente forma:

— Cuando $n=0$, no se realiza ninguna acción.
— Cuando $n=1$, se traslada directamente el disco de la primera varilla a la tercera.
— Para $n>1$:
  - Se desplaza la torre de $n-1$ discos desde la primera varilla hasta la segunda, aplicando el mismo procedimiento, pero intercambiando las funciones de la segunda y la tercera varilla.
  - Se mueve el disco más grande (el número n) desde la primera varilla a la tercera.
  - Finalmente, se pasa la torre de $n-1$ discos desde la segunda varilla hasta la tercera, nuevamente con el mismo procedimiento, pero esta vez intercambiando la primera y la segunda varilla.

Cabe destacar que este procedimiento no solo garantiza la solución más corta en términos de movimientos, sino que también es el único posible con dicha eficiencia, ya que cualquier otra estrategia óptima sigue exactamente los mismos pasos.

Así, esta sería la visualización para el caso $n = 3$:

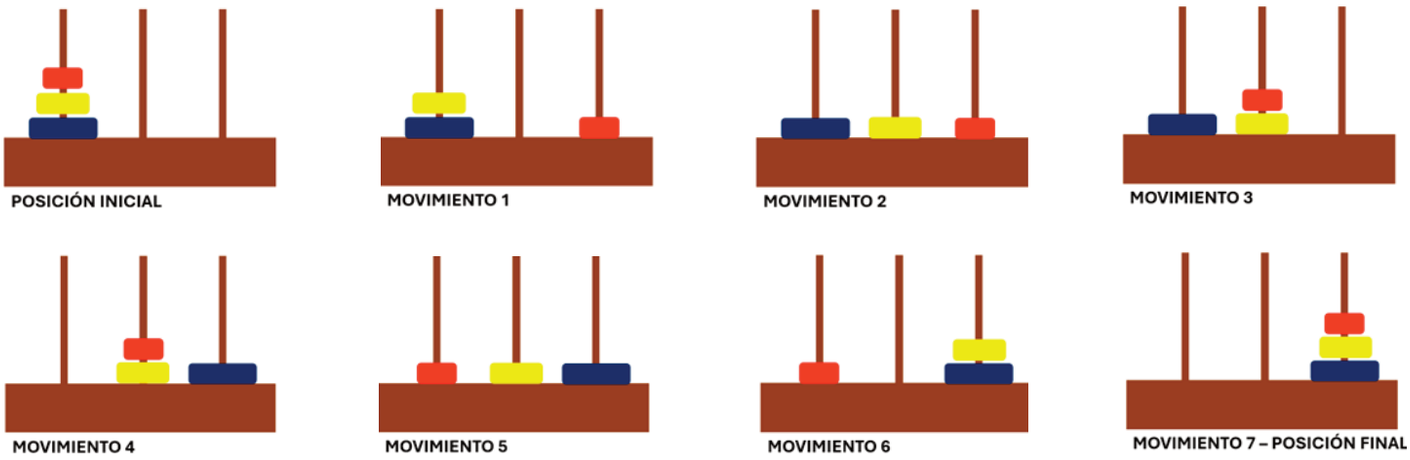

Figura 5. Resolución del rompecabezas de las Torres de Hanói para el caso $n = 3$ con $2^3 - 1 = 7$ movimientos

Para demostrar el teorema, primero, se debe comprobar que el algoritmo dado funciona. Es evidente que funciona para los casos base $n = 0$ y $n = 1$. Ahora, supongamos que el algoritmo funciona para una torre con $n - 1$ discos. Debemos demostrar que también funciona para una torre con n discos. Analizando el algoritmo paso a paso (Gil y otros, 2011):

— Mueve de manera correcta la torre de $n - 1$ discos de la primera varilla a la segunda.
— Mueve el n-ésimo disco de la primera varilla a la tercera.
— Mueve de manera correcta la torre de $n - 1$ discos de la segunda varilla a la tercera.

De esta manera, el algoritmo resuelve el problema, ya que los pasos 1 y 3 tienen éxito según la hipótesis inductiva. Así, por el principio de inducción, concluimos que el algoritmo funciona para torres con cualquier número de discos.

Por supuesto, la demostración de unicidad puede desarrollarse de un modo más profundo, pero el nivel de la misma puede considerarse de un nivel superior al que se desarrolla en las aulas de Educación Secundaria.

Por tanto, el uso del principio de inducción no solo se limita a problemas algebraicos, sino que también es muy útil en rompecabezas y juegos matemáticos, como las Torres de Hanói, donde se pueden identificar patrones y establecer reglas que funcionan para cualquier número de discos (Knuth, 1997). De esta manera, los estudiantes pueden conectar un concepto abstracto con situaciones concretas y visuales, haciendo que las matemáticas sean más comprensibles y entretenidas.

Conclusiones

El principio de inducción matemática se presenta como una herramienta lógica y muy útil que permite demostrar propiedades para todos los números naturales. A través de un enfoque secuencial y estructurado, el alumnado puede comprender cómo una afirmación verificable para un caso inicial se extiende de manera sistemática a infinitos casos, fortaleciendo su capacidad de razonamiento matemático.

Tal y como se ha explicado anteriormente, el rompecabezas de las Torres de Hanói es un ejemplo concreto y visual para aplicar este principio porque permite observar patrones en el movimiento de los discos y deducir el número mínimo de movimientos necesarios. Esto ayuda a los estudiantes a conectar conceptos abstractos con situaciones prácticas y lúdicas, facilitando tanto la comprensión como la memorización lógica de los contenidos matemáticos trabajados.

Además, el estudio del principio de inducción mediante problemas como las Torres de Hanói contribuye al desarrollo de habilidades cognitivas esenciales, incluyendo el pensamiento lógico, la resolución sistemática de problemas y la capacidad de generalizar soluciones. Este enfoque fomenta un aprendizaje activo y crítico, que va más allá de la memorización de fórmulas, incentivando la creatividad y el análisis riguroso.

Finalmente, cabe señalar el hecho de que integrar ejemplos visuales y dinámicos en la enseñanza de conceptos abstractos mejora la motivación y el interés de los estudiantes de Educación Secundaria. Además, esta estrategia muestra la relevancia y la belleza de las matemáticas en contextos divertidos y desafiantes.

Referencias bibliográficas

AZNAR, E. R. (s. f.), «Edouard Lucas», *Enrique R. Aznar, Dpto. Álgebra*. página web, consultada el 12 de enero de 2026 en <https://www.ugr.es/~eaznar/lucas.htm>.

FOMIN, D., S. GENKIN y I. ITENBERG (2012), *Círculos matemáticos*, SM Ediciones.

GIL, A., E. LANDA, O. RUIZ y J. TONELLI (2011), *Torres de Hanói*, Universidad del País Vasco.

KNUTH, D. E. (1997), *The art of computer programming, Volume 1: Fundamental algorithms (3rd ed.),* Addison-Wesley, Boston.

LÓPEZ, G. (2017, 16 de marzo), «Torre de Hanoi», vídeo, *YouTube*, consultado el 12 de enero de 2026 en <https://www.youtube.com/watch?v=ef9WulI9bJ0>.

LUCAS, É. (1979), *Récréations mathématiques, Tome III*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 55-59.

RUIZ, F. (2009), «Demostrando por Inducción», *Revista Tzaloa*, 1, 3.