Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 7
Noviembre de 2015

Al alcanzar este número 7, Entorno Abierto cumple su primer año y, con él, el objetivo de periodicidad bimestral. Vuestros artículos lo han permitido y nos felicitamos por ello.

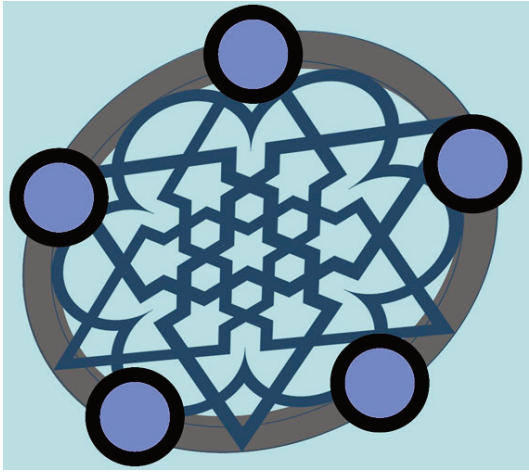
Venía siendo un lugar común nuestro lamento por la escasa renovación de la sociedad, necesitada del empuje y aportaciones de nuevas generaciones de profesores. En 2015 ha cambiado esa pauta. En el año que ahora termina han sido 20 los nuevos socios incorporados a la SAPM, a quienes damos la bienvenida. Así que tendremos que quejarnos de otra cosa... ¿o tal vez convenga seguir quejándonos? Ya somos 133.

Fue convocado el III Concurso de Radionovelas Matemáticas, dentro del convenio con el Gobierno de Aragón y con el apoyo de Aragón Radio, en cuyo canal de podcast pueden escucharse los 68 trabajos de la pasada edición:

http://www.aragonradio.es/iniciativas/conexion-matematica/

Las radionovelas pueden presentarse hasta el 23 de marzo de 2016.

Núcleo esencial de dicho convenio es el programa Conexión Matemática, que iniciara su andadura en el curso 2012-2013 y que en este curso recibió solicitudes de 47 centros. Las limitaciones existentes en cuanto a organización y medios obligan a que solo sean 20 los centros seleccionados, según recogía la convocatoria. Queda en evidencia la existencia en nuestros centros educativos de una voluntad dinamizadora en torno a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una importante novedad en este curso es la convocatoria de dos seminarios de formación (Primaria y Secundaria) dirigidos preferentemente al profesorado de los centros participantes en el programa, pero abierto al resto.



El pasado 21 de noviembre celebrábamos el II Día Geogebra en Aragón, con éxito en la participación (140 inscritos) y en la calidad de las ponencias, comunicaciones y talleres que cubrieron la intensa jornada. Esta edición ha sido convocada en colaboración con el IUMA (Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones) de la Universidad de Zaragoza, en el marco del *Congreso MArTech 2015 (Matemáticas, Arte y Tecnología)*, celebrado del 20 al 22 en el moderno edificio de Etopía. En la jornada previa pudimos conocer la aplicación de las matemáticas a la creación digital en video (Cristóbal Vila), al estudio de edificios históricos (Pilar

Sumario Interactivo

Algunos materiales en torno a Al-Mu'taman Ibn Hud
Fractales: una aproximación. El expresionismo abstracto
El problema de Monty Hall
Semifinal de la XXIV OMA de 2º ESO. Problema 5
Google Maths
Tocando la cuarta dimensión
Realización de una semana matemática

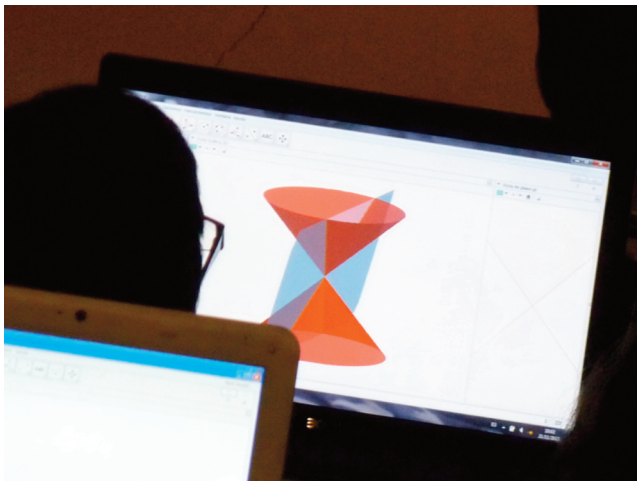
únete
a la SAPM
click

Rueda) y a la música fractal (Carlos Satué y Carlos Frías). La jornada posterior fue la Jornada SageMath, dedicada a las posibilidades de este software.

El II Día Geogebra ha contado con tres ponentes de experiencia acreditada: José Antonio Mora, que nos mostró el paseo con sus alumnos por el interior del cuadro de Las Meninas gracias a Geogebra, así como la investigación y realización práctica de mosaicos levantinos; José Luis Muñoz Casado, que proclamó y compartió que «la creatividad es la inteligencia divirtiéndose», utilizando para ello Geogebra como *juguete* de aprendizaje; y José Muñoz Santonja, que ofreció una visión con Geogebra de variadas obras de arte contemporáneas, varias de ellas ubicadas en nuestra tierra (imposible a partir de ahora viajar por la autovía Mudéjar sin llevar la mirada matemática despierta). También hemos podido elegir entre las 6 comunicaciones y los 5 talleres donde generosamente compañeros más iniciados en Geogebra (aunque alguno modestamente lo negase en el propio título de su exitosa comunicación) nos han mostrado sus experiencias y nuevas vías de aprendizaje.

Ha quedado en evidencia la existencia de un gran interés por las nuevas oportunidades que ofrece Geogebra para *hacer matemáticas* de una forma activa hasta ahora desconocida. Pero todavía son pocas las experiencias próximas, o al menos son pocas las que en forma de comunicaciones se hacen públicas. Confiamos en que, con el impulso de los *días Geogebra*, esta útil herramienta llegue a las aulas y conozcamos vuestros logros con ella.

Como ya ocurriera en el I Día Geogebra y en la I JEMA, aparte del programa oficial, esta jornada ha permitido el encuentro e intercambio de opiniones y experiencias entre compañeros con una misma tarea y unos mismos retos diarios. Si a ello unimos la ocasión de actualización profesional que ofrecen, las consideramos de gran importancia y desde la SAPM intentaremos proseguir el camino emprendido en esta línea.



Os recordamos que en diciembre comienza su proceso la XXV Olimpiada Matemática Aragonesa de 2º ESO, con la inscripción de centros, el primer paso necesario para planificar y confirmar cuáles serán las sedes de la Semifinal. Una vez alcanzado en la pasada edición el hito de los 118 centros y los 1.260 alumnos participantes, esperamos mantener esta popularidad que hace de la Olimpiada algo más que un *concurso de talentos:* un juego del conocimiento abierto a todos, una fiesta de las matemáticas.

José María Sorando Muzás
Secretario de la SAPM

Algunos materiales en torno a Al-Mu'taman Ibn Hud

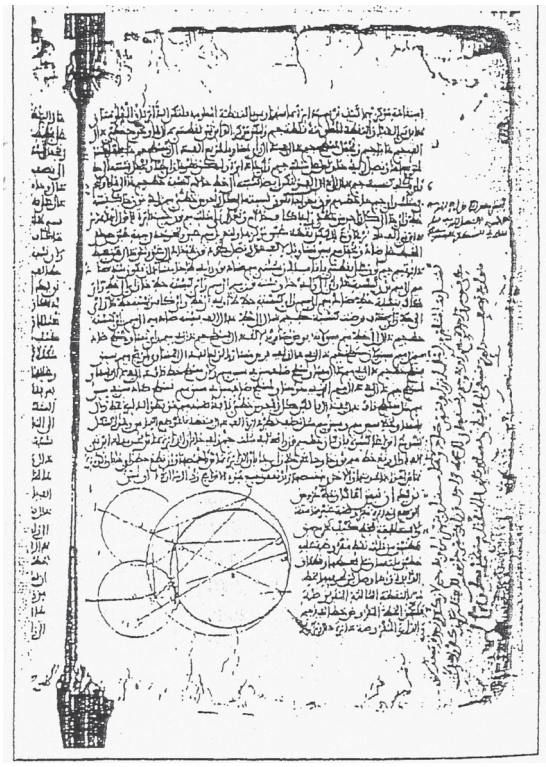
por
Christian H. Martín Rubio
(IES Virgen del Pilar, Zaragoza)

En el número anterior de *Entorno Abierto* nos encontrábamos con un magnífico artículo de Ángel Requena donde, a partir de la proclamación por la *Organización de las Naciones Unidas (ONU)* de este año como *el Año Internacional de la Luz y las Tecnologías basadas en la Luz*, nos presentaba, a través de sus aportaciones al *Problema de Alhacén*, al brillante matemático y rey de la taifa de Zaragoza, Al-Mu'taman ibn Hud.

Este personaje, con un peso considerable en la Historia de las Matemáticas, sin embargo no es excesivamente conocido, y por tanto tampoco reconocido, ni en nuestra tierra ni en nuestro ambiente. Las líneas que siguen pretenden exponer someramente algunas ideas y algunos materiales que nos puedan servir para animarnos en la indagación en su persona y obra.

Para ello, vamos a utilizar de guía un artículo[1] de Mariano Hormigón Blánquez (1946-2004), profesor del que pudimos disfrutar de su docencia en la Universidad de Zaragoza y que consiguió introducir a varias decenas de personas en la Historia de la Ciencia, materia en la que tenía un reconocimiento internacional. Aunque su actividad e influencia es casi imposible de cuantificar, sí que podemos resaltar varias tesis dirigidas, estudios realizados, publicaciones, encuentros e iniciativas y una magnífica escuela de historiadoras e historiadores de la ciencia: el *Seminario de Historia de la Ciencia y de Técnica de Aragón (SEHCTAR)*. Para una aproximación a Mariano Hormigón y al SEHCTAR, además de contener una bibliografía sobre Al-Mu'taman, se puede utilizar el artículo aparecido en el volumen 26 de Llull[2].

Este último artículo nos señala, como también lo hace Ángel Requena, que fue el *XIX International Congress of History of Science* (1993, Zaragoza) el marco en el que la figura de Al-Mu'taman adquiere una dimensión destacada, sobre todo a partir de la conferencia de J. P. Hogendijk[3], profesor de la Universidad de Utrecht. Este escrito, junto con otros dos más de este profesor[4] y uno último del profesor en el CNRS Ahmed Djebbar[5] (1941-) son las primeras aportaciones, y posiblemente principales, que sobre Al-Mu'taman se encuentran.



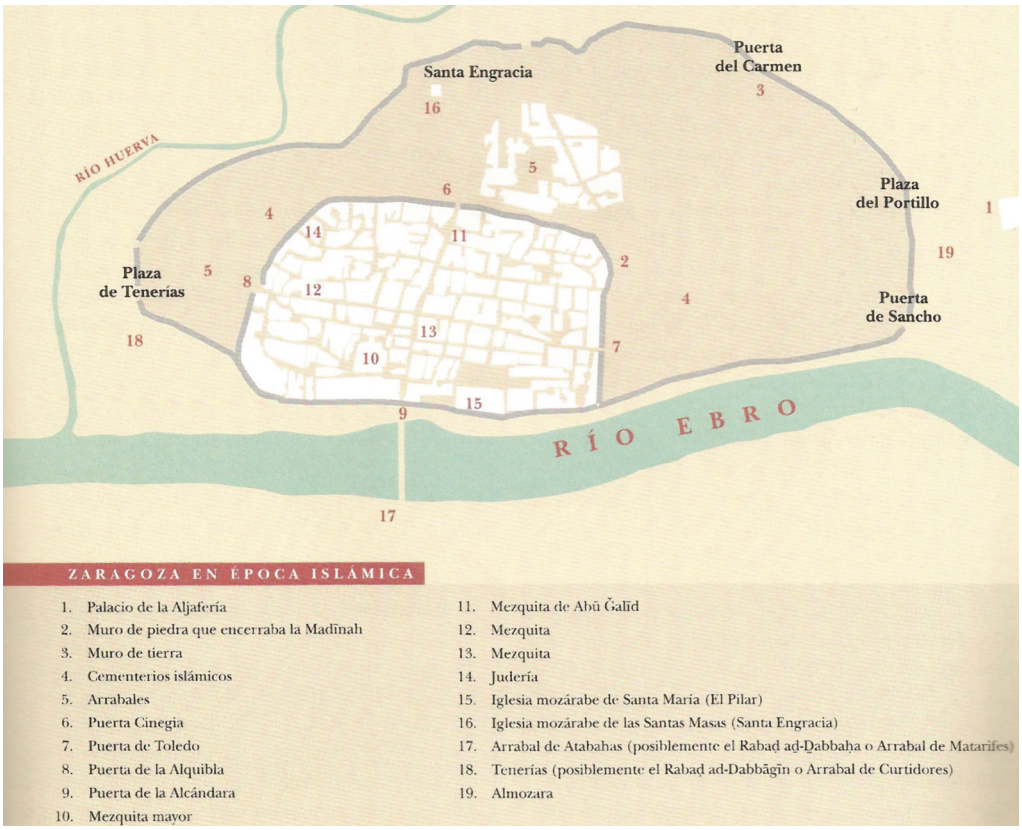
Al-Mu´taman ibn Hud. Página con teorema geométrico en el Istikmal, en M. Hormigón (1993), 168

El artículo de Hormigón comienza planteando algo que siempre deberíamos tener en cuenta en nuestros análisis y presentaciones: que en la actividad matemática —como en todas las actividades humanas en general— todo lo que hoy ocurre tiene sus raíces en otras actividades del pasado, se nutre de ellas. Así, comienza reseñando la figura de varios matemáticos anteriores a Al-Mu'taman, en Zaragoza. Nos habla de Abu ᶜUtman Saᶜid ibn Fathun ibn Mukarran al-Tuyibi al-Saraqusti, llamado Al-Hammar (el mulero), un matemático zaragozano que vivió a caballo del siglo X y XI y de otros tres matemáticos: Abu ᶜAbdAllah Muhammad ibn al-Husayn, conocido por el nombre de al-Kinani, de Ibn al-Kattani y de al-Kirm-

mani. Este último fundó en Zaragoza una importante escuela de matemáticos —teniendo en cuenta que lo que se designaba como «matemáticas» eran siete grandes ramas: Aritmética, Geometría, Óptica, Astronomía, Música, Mecánica e Ingeniería— que se extendió por toda la península, quedando algunos continuadores aquí, como Ibn Bargut y otros instalándose en Córdoba, como Ibn Sahr (que primero fue cadí de Almería) y al-Wasiti. Otro matemático nacido y formado en Zaragoza que nos expone es ᶜAbd Allah ibn Ahmad al-Saraqusti y su alumno ᶜAlî ibn Ahmad Dawud. En base a todo esto se puede afirmar que Zaragoza en el siglo XI era un foco fundamental del desarrollo matemático en la Peninsula Ibérica[6].

Tras ello, enseguida trata a nuestro personaje, primero aclarándonos por qué en algunos lugares es nombrado como al-Mu'tamin, estela de la denominación que usaron historiadores de la talla de H. Surtes y G. Sarton. Seguidamente, se nos muestra a Yusuf Al-Mu'taman como un buen gobernante (1081-1085), prudente y amigo del Cid, pero no sólo eso, ante todo resalta como «[…] el más importante matemático español medieval hasta ahora conocido.», hecho que ya destacaba Saᶜid al-Andalusi situándolo en 1068 entre los sabios jóvenes de la época.

El reconocimiento de Al-Mu'taman en el siglo XI en los reinos peninsulares y a partir del XII en los países del Magreb y en Egipto, se debe sobre todo a la difusión de la obra que Ángel Requena ya citaba en el anterior artículo, el *Kitab al-Istikmal* (Libro del perfeccionamiento) –en otras ocasiones llamado *Kitab al-Istikmalwal-manazir* (Libro de perfeccionamiento y Óptica)—, y que en este trabajo Hormigón cataloga como «[…] una pieza fundamental de un gran proyecto para mejorar las lagunas formativas de quienes se iniciaban en las matemáticas superiores. […]» y que debió ser muy bien aceptada muy pronto, como nos señala a partir de la opinión de algunos estudiosos del tema, como Ibn ᶜAqnin (ca. 1160-1226) —que lo incluye en la lista de libros que debían ser leídos por los estudiantes de geometría y señala varias revisiones de esta obra que con fines didácticos hicieron por ejemplo Maimónides— o el reconocido historiador de la ciencia G. Sartón, que se extraña que una obra de tanta importancia se hubiera perdido.



Zaragoza en época musulmana, en A. Montaner (1998), «Introducción histórica», en *La Alfajería. Cortes de Aragón,* Zaragoza, 1998, p. 45

Esto introduce la siguiente parte del artículo: el relato de la recuperación de esta obra y de su autor, de la mano del argelino Ahmed Djebbar y el holandés Jan P. Hogendijk, que a partir de cuatro fragmentos anónimos, encontrados en Leiden, Copenhague, El Cairo y Damasco, y que constituían las tres cuartas partes del libro, difundieron «[…] la fuerte impresión de que en la Zaragoza del siglo XI vivió y reinó el más importante geómetra de al-Andalus y, posiblemente, del Occidente europeo en el periodo medieval.» Otras ideas que se desarrollan en esta parte es la riqueza de las bibliotecas zaragozanas de esta centuria, cuyos ejemplares se pudieron utilizar para las posteriores traducciones al latín de obras científicas y el reparto del estudio de la obra entre Djebbar, que se compromete con la teoría de números y Hogendijk, que se hace cargo de la geometría.

En el penúltimo apartado del artículo analiza la estructura del *Istikmal*, previniéndonos que nunca debió escribirse completamente, quedando sin hacerlo el segundo género. Con una estructura compleja, aunque detallada en esta parte, el texto está dividido en cinco especies, a su vez subdividido en secciones. La primera especie está dedicada a la teoría de números; las dos siguientes sobre líneas, ángulos y figuras planas; y las dos últimas tratan sobre la geometría en el espacio. Al final de este apartado nos encontramos también la misma opinión expresada por Requena sobre Al-Mu'taman y el problema de Alhacén.

Acaba el artículo con una parte en la que se expone la sucesión de Al-Mu'taman, en lo político a manos de su hijo Ahmad al-Mustaᶜin bi-llah, pero también la actividad intelectual posterior, sobre todo en la figura de Abu Bakr ibn al-Sa'ig ibn Bayya, Avempace.

Como se aprecia, numerosos datos y bibliografía, que pueden constituir verdaderos hilos de Ariadna, están contenidos en este artículo que tratamos. Creo que Al-Mu'taman es una figura aún por estudiar, al menos en una rápida revisión por Teseo no aparece ninguna tesis sobre él y sin embargo queda probado la gran importancia que tiene su persona y Zaragoza en el desarrollo matemático del siglo XI. Recordarnos y reivindicarnos nuestra historia, estudiar las aportaciones que la Zaragoza islámica realizó y reconocer la parte musulmana que posiblemente la mayoría de nosotros y nosotras tenemos en nuestro árbol genealógico, también ayuda a que este sea un mundo más pacífico. Alguien debería hacerlo con Yusuf Al-Mu'taman ibn Hub.

Sirvan estas *Notas* también como *Bibliografía* del artículo:

1 HORMIGÓN, M (1993), «Al-Mu'taman ibn Hud. Un geómetra en el trono de Zaragoza», en *Una década de investigación en Aragón (1984-1993)*, C.O.N.A.I, 162-171.

2 HORMIGÓN, M, y E. AUSEJO (2003), «Veinticinco años de Historia de la Ciencia en Aragón», *Llull,* vol. 26, 512-594

3 HOGENDIJK, J. P. (1995), «Al-Mu'taman ibn Hūd, 11th century king of Saragossa and brilliant mathematician», *Historia Mathematica,* 22, 1-18. Se puede encontrar el resumen de la conferencia en: HOGENDIJK, J. P. (1993), "Al-Mu'yaman ibn Hub, King of Saragossa and brilliant mathematician", en J. Dhombres, M. Hormigón y E. Ausejo (eds.) (1993), *XIX International Congress of History of Science: Simposia Survey Papers – Plenary Lectures,* Zaragoza, 329-331. También se pueden descargar muchos de sus trabajos a partir de su página web:

<http://www.jphogendijk.nl/>

4 HOGENDIJK, J. P. (1986), Discovery of anIlth-Century Geometrical Compilation: the Istikmal of Yusuf Al-Mu'taman ibn Hud, King of Saragossa. Historia Mathematica, 13, 43-52.

HOGENDIJK, J. P. (1990), «The geometrical parts of the "Istikmal" of Yusuf Al-Mu'taman ibn Hud (11th century). An analytical table of contents», *Prepint,* n.º 626. University Utrecht, Department of Mathematics. Este artículo, posteriormente, apareció en: *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 41 (1991), 207-281. Se puede descargar también el trabajo posterior J. P. Hogendijk (2004), «The lost geometrical parts of the Istikmal of Yusuf al-Mu'taman ibn Hud (11th century) in the redaction of Ibn Sartaq (14th century). An Analytical Table of Contents», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* 53 (2004), 19-34.

5 DJEBBAR, A. (1984), «Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XIe siècle: Al-Mu'taman et Ibn Sayyid», prépublication du Departement des Mathématiques, Orsay, Université de Paris Sud, reproducido en M. Folkerts y J. P. Hogendijk (1993), *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Blusard*, Amsterdam-Atlanta, Rodopi, 79-91. Para su consulta, este libro se encuentra en la Biblioteca de Ciencias Matemáticas, de la Universidad de Zaragoza, con la signatura BIB-HC-M/H 246. El contacto con el profesor Djebbar se puede encontrar aquí <https://math.univ-lille1.fr/d7/pbook_anedp>.

6 Señala también Mariano Hormigón que otro instante en el que Zaragoza ha tenido una importancia reseñable en estos temas es, a finales del siglo XIX y comienzos del XX, con la figura del profesor Zoel García de Galdeano. De él, y de otros, nos habla en la revista *Trebede*, 57 (Nv/2001) que lleva por tema «Aragón y la ciencia», y donde nos vuelve a aparecer Al-Mu'taman, por ejemplo de la mano de Jose Luis Corral. Este autor también recrea el ambiente intelectual al que hacíamos referencia en este párrafo en su novela *El salón dorado,* donde de nuevo tiene presencia Al-Mu'taman.

Fractales: una aproximación. El expresionismo abstracto

por
Claudio Martínez Gil
(IES Alhama, Corella)

Este artículo trata de explicar el concepto de dimensión fractal, dando unas pinceladas de su evolución histórica. Una vez conseguido lo anterior se aplica este concepto a una corriente pictórica del siglo XX, el expresionismo abstracto, cuyo principal exponente es el pintor estadounidense Jackson Pollock.

Dimensión fractal

Puede considerarse que el origen de los fractales, tal como lo conocemos ahora, es el artículo de Benoit Mandelbrot «How long is the coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension» aparecido en la revista *Science* en el año 1967.

Benoit Mandelbrot es el principal exponente del interés por la Geometría fractal. Mostró cómo los fractales aparecen en muchos campos, tanto en las Matemáticas como, sobre todo, en la Naturaleza. Fractal viene del latín fractus, que significa roto o fracturado.

En 1982 publica su obra más conocida, *Fractal Geometry of Nature*, donde expresa que los fractales son más naturales que los objetos basados en la geometría euclidiana, que han sido suavizados artificialmente:

> Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en una línea recta.

Los fractales pueden venir definidos por sus características:

1. Son estructuras que se repiten en escalas cada vez más pequeñas (self-similarity).
2. Son demasiado irregulares para ser descritos por la Geometría Euclídea.
3. Son estructuras geométricas divididas en partes, cada una de las cuales es (al menos aproximadamente) una copia de tamaño reducido de la estructura original.
4. Se forman por iteración: La definición es recursiva.

Como primera aproximación pensemos que la dimensión fractal de una línea es 1, una superficie tiene dimensión 2, un volumen tiene dimensión 3 y un punto tiene dimensión 0.

Cuadrado: dimensión 2

1. ¿Cuántas copias del cuadrado juntaremos para hacer un cuadrado de tamaño doble? 4 ($2^2 = 4$)
2. ¿Cuántas copias del cuadrado se han de juntar para hacer un cuadrado de tamaño triple? 9 ($3^2 = 9$)

Cubo: dimensión 3

1. ¿Cuántas copias del cubo se han de juntar para hacer un cubo de tamaño doble? 8 ($2^3 = 8$)
2. ¿Cuántas copias del cubo se han de juntar para hacer un cubo de tamaño triple? 27 ($3^3 = 27$)

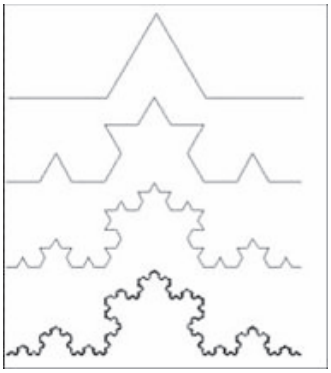
Tenemos un objeto para el que necesitamos ensamblar N copias para construir una versión más grande con un factor de escala S. La dimensión fractal del objeto se define como el número real positivo d, que cumple:

$$S^d = N$$

Ejemplo 1. Curva de Koch

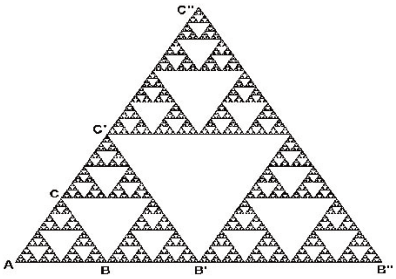
1. ¿Cuántas copias de la curva original son necesarias para construir una versión más grande? 4.

2. ¿Cuál es el factor de escala que hay que aplicar a la Curva de Koch para obtener la curva más grande inmediatamente posterior? 3 (La longitud del segmento 'que hace el mismo papel' en una versión y en la posterior está multiplicada por 1/3)
3. Así: $3^d = 4$, entonces, $d = log(4)/log(3) = 1{,}26185.....$



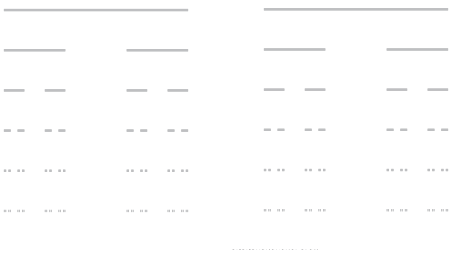
Ejemplo 2. Triángulo de Sierpinski

1. Tenemos que ensamblar tres copias del Triángulo de Sierpinski para crear una versión más grande, que es el doble de tamaño que el original. (La longitud de los lados del triángulo grande es doble de la longitud de los lados del triángulo original)
2. Así: $2^d = 3$, entonces, $d = log(3)/log(2) = 1{,}585.....$



Ejemplo 3. Conjunto de Cantor

1. Tenemos dos copias de la iteración n del conjunto de Cantor para conseguir la iteración posterior. La longitud del segmento de la iteración $n + 1$ es 1/3 de la longitud del segmento de la iteración n 'que hace el mismo papel'.
2. Así: $3^d = 2$, entonces, $d = log(2)/log(3) = 0{,}6309....$



Estos 3 ejemplos son dimensiones de fractales *perfectos*. En general la dimensión fractal se calcula de manera aproximada por métodos numéricos, de entre los que destaca el *box-counting method*.

El expresionismo abstracto

Jackson Pollock fue un pintor estadounidense y un referente del expresionismo abstracto. Suyas son varias pinturas que se encuentran entre las más caras del mundo. Una de ellas es la *Number 5* que se vendió en 148 millones de dólares. Sus pinturas son consideradas como *pintura fractal*.

Pollock era una persona aislada y tenía problemas de alcoholismo los cuales enfrentaba día a día durante toda su vida. En 1945 se casó con la artista americana Lee Krasner, quien se convirtió en una influencia importante en su carrera y legado.

Pollock murió a los 44 años en un accidente automovilístico debido a que conducía ebrio. En diciembre de 1956, meses después de su muerte, Pollock fue conmemorado con una retrospectiva en el Museo de Arte Moderno de Nueva York. En el año 2000 un filme basado en la vida de Jackson Pollock, dirigido y protagonizado por Ed Harris, ganó un premio de la Academia.

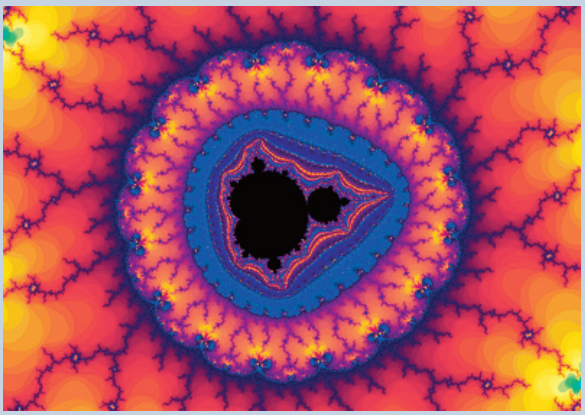
Las pinturas de Jackson Pollock tienen una dimensión fractal característica, a dos escalas, que se acentúa con los años (Richard Taylor)

Fractal de Mandelbrot

Dadas las constantes c_1 y c_2, el fractal de Mandelbrot se define por la recurrencia:

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$
$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n^2 - y_n^2 + c_1, 2x_n\ y_n + c_2)$$

Elegimos constantes K, c_1, c_2 con $||(x_n, y_n)|| < K$, para $n \in \mathbb{N}$.



El problema de Monty Hall

por

Óscar Carrión Lostal

(IES Valdespartera, Zaragoza)

Está basado en el programa-concurso de la televisión americana *Let´s make a Deal* (Hagamos un trato) que se emitió entre 1963 y 1986, cuyo nombre proviene del presentador de dicho concurso, Monty Hall. Destacar que la diferencia entre el programa-concurso y el problema de Monty Hall propiamente dicho, es que en el programa-concurso, los concursantes no tenían opción de cambiar su elección inicial.

Otros programas parecidos y que se han emitido en España son el *Un, dos, tres* y *Allá tú*.

Se han estudiado las posibles soluciones con distintas versiones o alteraciones del juego, el primero en plantear como tal dicho problema fue *Selvin* en 1975 [1] en una carta a la *revista American Statistician*. Hasta el propio Monty Hall contestó a Selvin: «…Y si alguna vez vas a mi programa, las reglas también se te aplicarán – no se te permitirá cambiar de caja después de que hayas realizado tu elección», a cuya carta contestó Selvin [2]. Un problema análogo a éste es el publicado por *Gardner* [3] en 1959 titulado «el problema de los tres prisioneros». Pero no fue hasta que la columnista *Marilyn vos Savant* (apareció en el libro Guiness de los Récords como la persona con el coeficiente intelectual más alto del mundo: 228) en la *revista Parade* respondió a un lector, cuando cogió realmente relevancia dicho problema. Hubo bastante correspondencia entre los lectores y la columnista, ya que los lectores y famosos matemáticos no admitían la solución propuesta por la columnista, incluso la magnitud del problema llegó al *New York Times*, hasta que al final con la *simulación por Montecarlo* se comprobó que la solución aportada por la columnista era la correcta (es cuando el matemático húngaro *Paul Erdós* aceptó su error). Incluso muchas revistas científicas de psicología se han hecho eco de este problema, ya que la mayoría de la gente, cuando se les plantea dicho problema, se equivoca al argumentar que, cuando Monty abre una de las puertas revelando una cabra, las dos puertas que permanecen en juego tienen la misma probabilidad de contener el coche.

Han aparecido diferentes referencias del problema en distintos medios de comunicación, ejemplo de ello son las siguientes:

— Libro de lectura: *El curioso incidente del perro a medianoche*, de Mark Haddon.
— Serie *Numb3rs*: <https://www.youtube.com/watch?v=pqJBTWoIkbA>
— Película *21 Black Jack:* <https://www.youtube.com/watch?v=THGJQuYFFpg>.

El presente artículo tiene como finalidad mostrar la versión clásica que tiene el juego y analizar qué estrategia es la más óptima desde el punto de vista del jugador, si la de permanecer o la de cambiar su elección inicial, para ello vamos a hacer uso de la *simulación* con el programa *ARENA* [4] donde se incluirán los módulos usados y una breve explicación de su implementación.

Dicho programa en su versión académica la podemos descargar gratuitamente de la página:

<https://www.arenasimulation.com/academic/students>.

Versión previa

El presentador muestra 2 puertas idénticas. Una de ellas contiene un coche de premio y la otra no tiene premio (tiene una cabra). El concursante elige una de las dos puertas. A continuación el presentador abre la puerta que no ha elegido el concursante, ¿con qué probabilidad se llevará el concursante el coche?

El problema así planteado es análogo al del lanzamiento de una moneda, por lo que la probabilidad de ganar el coche es de 1/2.

Versión 01. Versión clásica del problema

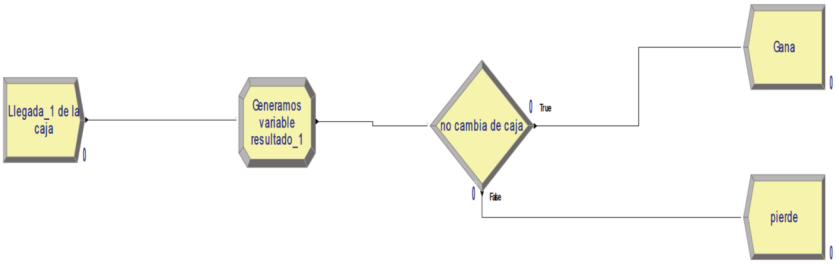
El presentador muestra 3 puertas idénticas. Una de ellas contiene un coche de premio y las otras dos no tienen premio. El concursante elige una de las puertas y el presentador no la abre. El presentador sabe detrás de qué puerta está el coche. Él aleatoriamente elige una de las dos puertas restantes (si la elección inicial contiene el coche) y abre una de ellas, y si no se ve obligado a abrir la puerta que no contiene el coche (si la elección inicial no contiene el coche). A continuación da la opción al concursante de cambiar de puerta o de mantener la elección de puerta inicial. ¿Qué se debería hacer?

La puerta que abre el presentador no puede ser la puerta donde está el coche y además no puede ser la elección inicial del concursante.

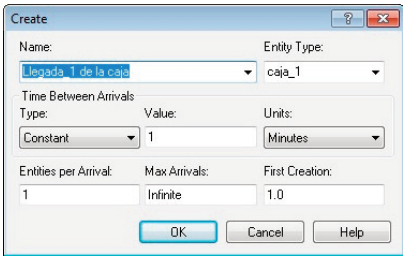
A partir de ahora y si no se dice lo contrario, el *nº de repeticiones* ha sido de *10000*, por lo que las dos primeras cifras decimales obtenidas mediante la simulación son significativas:

1) Opción de quedarse con la caja inicial – *Estrategia de permanecer con la caja inicial*

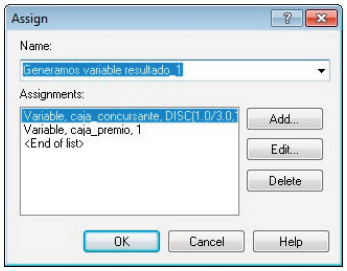
El esquema es el siguiente:

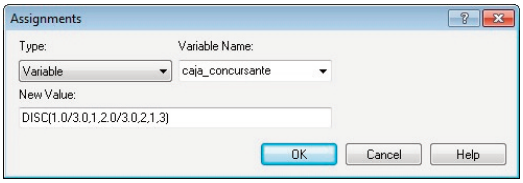


Se ha creado un módulo CREATE llamado *Llegada_1 de la caja*, con las especificaciones:



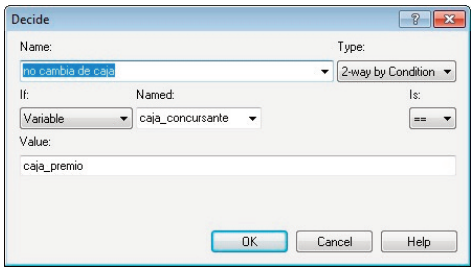
Un módulo ASSIGN, llamado *Generamos variable resultado_1*, con las siguientes especificaciones:





Donde se ha definido sin pérdida de generalidad una variable *caja_premio* con el valor 1, y una *caja_concursante* con los valores 1, 2 o 3 con la misma probabilidad.

Un módulo DECIDE llamado *no cambia de caja*, con las especificaciones:

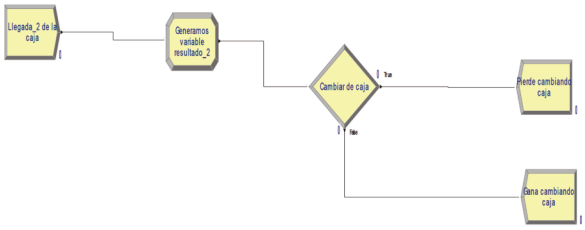


Este tiene dos salidas, TRUE cuando la variable *caja_concursante* es igual al valor de la variable *caja_premio*, en tal caso gana el premio, salida por el módulo DISPOSE llamado *Gana*, y otra salida FALSE, cuando no ocurre lo anterior, y en cuyo caso el jugador pierde, y la salida es por el módulo DISPOSE llamado *Pierde*.

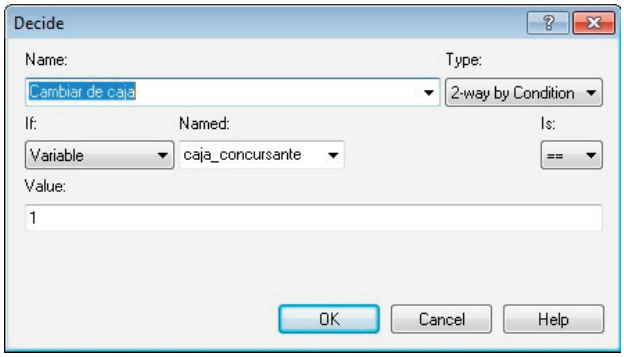
Resultados de la simulación: P(ganar) =0,3344

2) Opción de cambiar la caja inicial – *Estrategia de cambiar la caja inicial*

El esquema es el siguiente:



El procedimiento es análogo al caso anterior, pero en este caso el módulo DECIDE llamado *Cambiar de caja* tiene las siguientes especificaciones:



Tiene dos salidas, TRUE cuando la variable *caja_concursante* es igual al valor de la variable *caja_premio*, en tal caso pierde el premio, salida por el módulo DISPOSE llamado *Pierde cambiando caja*, y otra salida FALSE, cuando no ocurre lo anterior, y en cuyo caso el jugador gana, y la salida es por el módulo DISPOSE llamado *Gana cambiando caja*.

Resultados de la simulación: P(ganar) =0,6624

Por tanto se ha comprobado de una forma experimental, es decir, a través de la simulación que *la mejor estrategia para la versión clásica es la de cambiar de caja*, y que con esta se gana con una probabilidad de 2/3.

Conclusión

Estrategia de permanecer: 1/3

Estrategia de cambiar: 2/3

Algunas páginas web que presentan simulaciones del juego, ya sea con Javascript o con Excel son las siguientes:

http://www.nytimes.com/2008/04/08/science/08monty.html?_r=0
http://www.curiouser.co.uk/monty/montygame.htm
http://www.estadisticaparatodos.es/taller/montyhall/montyhall.html
http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/estadistica_y_probabilidad/estimacion/monty_hall/actividad.html
http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_117_g_3_t_5.html?from=topic_t_5.html
http://www.estadisticaparatodos.es/taller/montyhall/montyhall.html#00

Referencias

[1] SELVIN, S. (1975), «A Problem in Probability» (letter to the editor), *American Statistician,* vol. 29, n.º I, p. 67.
[2] — (1975), «On the Monty Hall Problem» (letter to the editor), *American Statistician,* vol. 29, n.º 3, p. 134.
[3] GARDNER, M. (1959), «Mathematical games», *Scientific American*, n.º 219, pp. 180-182.
[4] KELTON, W. D., R. P. SADOWSKI y D. T .STURROCK (2004), *Simulation with Arena*, Mc Graw Hill.
[5] ROSENHAUSE, J. (2009), *The Monty Hall Problem,* Oxford University Press
[6] CORBALÁN, F., y G. SANZ (2010), «La conquista del azar», col. *El mundo es matemático,* RBA.

Otras referencias

BATANERO, C., J. M. CONTRERAS y J. A. FERNANDES (2009), «Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas», *Suma*, n.º 62, 11-18.
CARRIÓN, Ó. (2014), «Generalizaciones del Problema de Monty Hall y su aplicación didáctica», *TAZ TFM* 2014-813 Universidad de Zaragoza.

Semifinal de la XXIV OMA de 2º ESO. Problema 5

por
Maider Goñi Urreta
(IES Leonardo de Chabacier, Calatayud)

El 21 de marzo de 2015 se celebró en distintos puntos de la geografía aragonesa la fase semifinal de la XXIV Olimpiada Matemática Aragonesa de 2º de ESO. En esta ocasión, estaban inscritos un total de 1261 alumnos dispuestos a enfrentarse a una colección de 6 problemas, de manera que cada alumno disponía de dos tandas de una hora para abordar 3 problemas en cada tanda. En particular, el 5º de los problemas propuestos fue el siguiente:

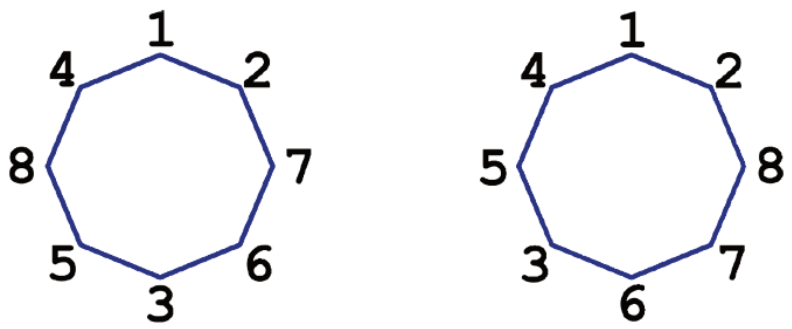
Enunciado

Dibuja un octógono cualquiera y pon en cada vértice un número del 1 al 8, sin repetir ninguno, de tal forma que:

— los números vecinos del 1 sumen 6
— los números vecinos del 8 sumen 9
— los números vecinos del 3 sumen 11
— los números vecinos del 6 sumen 10

Solución

Existen dos soluciones a este problema, dos series de números que cumplen todos los requisitos del enunciado, y son (salvo rotación y simetría del octógono):



Como además se pide que la solución esté razonada, paso a explicar una manera de obtener la solución basada en el análisis de forma implícita de todos los casos posibles.

Se comienza colocando el número 1 en un vértice cualquiera del octógono. Sus números vecinos deben sumar 6. Los pares 1-5 y 3-3 se excluyen inmediatamente porque repetiríamos números, así que la única posibilidad que queda es que los vecinos del 1 sean el 2 y el 4. Por tanto, se colocan dichos números a ambos lados del 1 de manera que, por ejemplo, el 2 queda a la derecha y el 4 a la izquierda. De esta forma, la disposición actual es la 4-1-2. A continuación se examinan los distintos números que pueden continuar la serie como vecinos del 2 y en adelante.

El número 2 no tiene ninguna condición que cumplir, así que, en principio, cualquier número de los restantes podría continuar la serie:

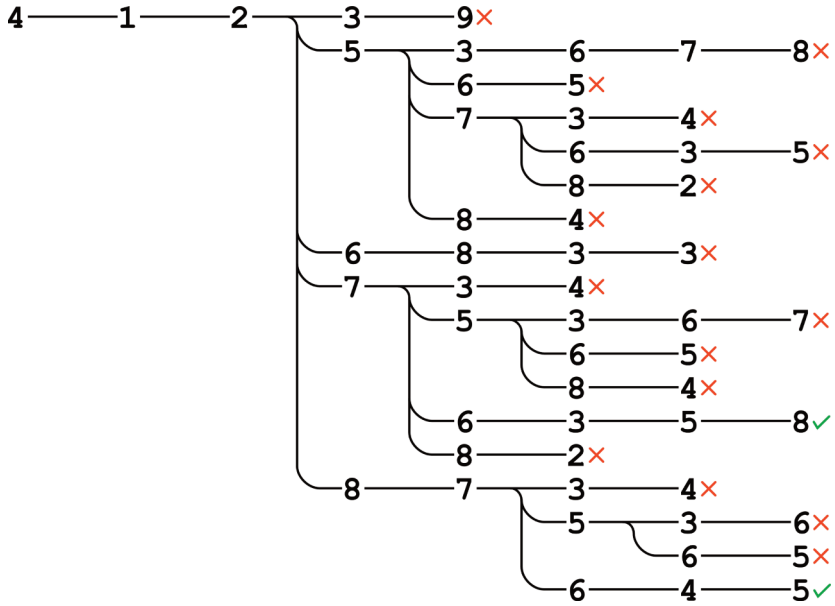
— Si colocamos el 3 (4-1-2-3) se tendría que continuar obligatoriamente con el número 9 para que los vecinos del 3 sumasen 11, hecho que contradice que sólo se pueden utilizar los números del 1 al 8, por lo que la serie 4-1-2-3- queda descartada.

— Si colocamos el 5 (4-1-2-5) se puede continuar con cualquiera de los números restantes ya que el 5 no tiene ninguna condición que cumplir.

- Si se sigue con el 3 (4-1-2-5-3) el siguiente número debe ser el 6 ya que los vecinos del 3 suman 11. A continuación debe ir el 7 ya que los vecinos del 6 suman 10 y, en este punto, solo quedaría por colocar el número 8 que iría enlazado con el 4 inicial. Sin embargo, en esta serie los vecinos del 8 no suman 9 luego no es una solución válida.
- Si se sigue con el 6 (4-1-2-5-6) el siguiente número tendría que ser el 5, pero ya lo hemos utilizado en la serie, luego esta serie queda descartada.
- Si se sigue con el 7 (4-1-2-5-7) cualquier número restante puede continuar la serie porque el 7 no tiene que cumplir ningún requisito. Aplicando los criterios del enunciado, ninguna de las series que se obtienen en este caso es factible. Notemos que, por ejemplo, la serie (4-1-2-5-7-3-4) vuelve de nuevo al número de comienzo sin haber empleado todos los números del 1 al 8.

Continuando con este razonamiento se consiguen analizar implícitamente todas las posibles soluciones y descartar fácilmente aquellas que no son validas. Sólo en el caso de las series 4-1-2-7-6-3-5-8 y 4-1-2-8-7-6-3-5 se vuelve al principio habiendo cumplido todos los apartados del enunciado.

En el siguiente dibujo se puede ver el diagrama de árbol construido para encontrar las posibles soluciones al problema.



Otra manera de abordar la resolución del problema consiste en analizar las distintas parejas de vecinos. Teniendo en cuenta las condiciones del enunciado y analizando las posibles sumas se tiene que:

— Posibles vecinos del 1: 2 y4
— Posibles vecinos del 3: 4 y 7, 5 y 6
— Posibles vecinos del 6: 2 y 8, 3 y 7
— Posibles vecinos del 8: 2 y 7, 3 y 6, 4 y 5

Si nos fijamos en los posibles vecinos del 3 observamos que el 8 no es uno de ellos, es decir, el 3 y el 8 no van a ser vecinos. Por tanto podemos descartar la pareja 3 y 6 del conjunto de posibles vecinos del 8 (posibles vecinos del 8: 2 y 7, ~~3 y 6,~~ 4 y 5).

Si examinamos los posibles vecinos del 8 observamos que el 6 no es uno de ellos (antes estaba, pero lo hemos descartado), es decir, el 6 y el 8 no van a ser vecinos. Así, podemos descartar la pareja 2 y 8 del conjunto de posibles vecinos del 6 (posibles vecinos del 6: ~~2 y 8,~~ 3 y 7).

A la vista de este último paso nos damos cuenta de que, ahora, el 3 y el 6 son vecinos seguro, por tanto podemos descartar la pareja 4 y 7 como posibles vecinos del 3 (posibles vecinos del 3: ~~4 y 7~~, 5 y 6).

Recapitulando, los vecinos del 1 son 2 y 4, los vecinos del 3 son 5 y 6 y los vecinos del 6 son 3 y 7. Únicamente en el caso del número 8 existente dos parejas de posibles vecinos:

— Si los vecinos del 8 son 2 y 7: al colocar estos números sobre los vértices del octógono el resto de nodos quedan directamente determinados por las relaciones de vecindad y la solución que se obtiene es la : 4-1-2-8-7-6-3-5.

— Si los vecinos del 8 son 4 y 5: al colocar estos números sobre los vértices del octógono el resto de nodos quedan directamente determinados por las relaciones de vecindad y la solución que se obtiene es la : 4-1-2-7-6-3-5-8.

Análisis de los resultados

Con respecto a las soluciones propuestas por los alumnos, de los 835 que finalmente participaron en la olimpiada, el 85% encontró, al menos, una solución a este problema, un 14% lo intentó pero no llegó a la solución y el 1% restante dejó el problema en blanco.

Si se analizan por separado los distintos apartados del enunciado se pueden observar algunos aspectos interesantes. Por ejemplo, el enunciado pide, en primer lugar, que se dibuje un octógono cualquiera. Por lo tanto, no es necesario que el octógono sea regular. Sin embargo, el 16% de los participantes ha dibujado un octógono regular con regla y compás. Además cabe destacar que la tendencia ha sido el octógono regular, puesto que del 82% de los participantes que han dibujado un octógono irregular, la mayoría pretendía que fuera regular. Otro tipo de octógonos irregulares han aparecido con menor frecuencia en la resolución de algunos participantes, en su mayoría convexos aunque alguno cóncavo se ha colado, ya fuera estrellado o no. Si bien es cierto que un 2% no ha dibujado ningún octógono ya sea porque ha representado una estrella de ocho puntas, un polígono con más de ocho lados o ha dejado el ejercicio en blanco.

Otro aspecto llamativo ha sido descubrir que la indicación «pon en cada vértice» no ha sido entendida por todos los participantes ya que el 9% ha situado los números sobre las aristas. Este error puede deberse a que o bien no entienden el concepto de vértice o lo confunden con el de arista o bien no han leído esa parte del enunciado y han colocado los números donde les ha parecido oportuno.

En cuanto al tipo de resolución empleada en este problema, un 89% lo ha hecho por tanteo o ensayo-error mientras que solo el 11% ha dado una respuesta razonada. La mayoría de los ejercicios presentan solo la solución y solo unos pocos tienen algún esbozo o intento de razonamiento pero nada más. Es curioso observar que solo una tercera parte de los participantes ha escrito la comprobación de la solución.

Si nos centramos en los que han razonado la respuesta, el razonamiento empleado ha sido similar en todos ellos. Comienzan por el número 1, quizá porque es el primero que aparece en las condiciones del enunciado. Por un lado, llegan a la conclusión de que los vecinos del 1 son el 2 y el 4 de la misma manera que se propone en este artículo, por descarte. Muchos de ellos establecen las posibilidades para los vecinos de cada número y van descartando algunas de ellas conforme avanzan poniendo números en la serie. Eso sí, hay una tendencia clara a ir cumpliendo las condiciones del enunciado en el mismo orden en que aparecen.

Al no dar un razonamiento completo, llega un momento en el que se arriesgan con un número y continúan la serie a partir de la opción elegida. Resulta curioso observar que el 70% de los alumnos propone la solución 4-1-2-7-6-3-5-8, el 30% la solución 4-1-2-8-7-6-3-5, y solamente dos participantes proponen ambas.

Los errores más frecuentes encontrados en la resolución de este problema se pueden clasificar en varios tipos: los que tienen que ver con la lectura del enunciado y los relacionados con los conceptos involucrados. Además de los ya mencionados errores sobre la representación de un octógono o la no situación de los números sobre los vértices, hay que mencionar que muchos de los participantes no han entendido las instrucciones dadas sobre los criterios a cumplir. Llama la atención encontrar varias pruebas en las que el participante no entiende el concepto de *vecino* ya sea porque considera al propio número su vecino o piensa que son vecinos solo el inmediatamente siguiente o siguientes a uno solo de los lados. En cualquier caso, cinco participantes concluyen que el problema no tiene solución.

En general, creo que muchos alumnos no están acostumbrados a leer minuciosamente el enunciado de un problema y tienden a interpretar lo que leen en parte. Además, hay una tendencia clara a no explicar el procedimiento empleado para resolver un problema. Para muchos alumnos, basta con hacer las operaciones necesarias en la cabeza y escribir solo la solución, cuando lo verdaderamente interesante sería que escribieran y explicaran cada paso de la resolución del problema.

Google Maths

por
Beatriz Rubio Serrano
(Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza)

En los últimos años el crecimiento de usuarios de Internet ha sido exponencial, hasta el punto de que la mayoría de nosotros nos conectamos diariamente. No sólo el correo electrónico es algo indispensable en nuestra comunicación, sino que la información que nos encontramos en la red es para todos nosotros esencial. Precisamos de la red para indagar desde cosas triviales como direcciones y teléfonos, mapas, ofertas... hasta compras, búsqueda de trabajo o incluso para ampliar nuestro conocimiento. ¿Quién no ha utilizado alguna vez un buscador? O mejor dicho, ¿quién no ha utilizado el buscador Google?

Google es actualmente el buscador más popular, con infinidad de páginas censadas y da servicio a más de 250 millones de consultas diarias de forma inmediata gracias a sus miles de computadoras. Google es como un bibliotecario trabajando a la velocidad de la luz: refina la búsqueda y acaba encontrando lo que queremos.

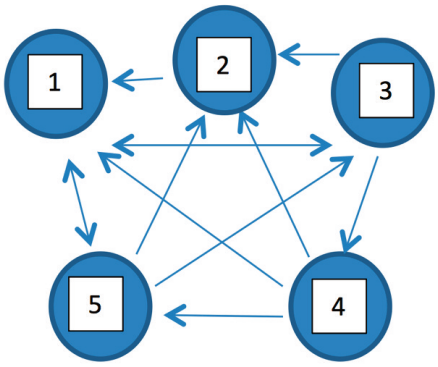
Lo que ha permitido todo este eficiente servicio de Google para indexar páginas web ha sido la informática, por supuesto, y cómo no: las matemáticas.

¿Os habéis preguntado por qué en nuestra búsqueda aparecen unas páginas antes que otras? Aquí es donde entra en juego el algoritmo de Google llamado Page Rank, inventado por los fundadores de Google, el informático Larry Page —de ahí el nombre del algoritmo— y el matemático Sergey Brin.

Veamos un ejemplo para qué podamos visualizar cómo Google a través de su algoritmo Page Rank posiciona unas páginas antes que otras.

Antes de nada debemos saber que todo Internet es a efectos de conectividad un inmenso grafo dirigido. En este grafo los nodos son las páginas web, las líneas entre los nodos son las conexiones/referencias entre páginas, y el grafo es dirigido porque dichas conexiones pueden ser en una sola dirección o en doble direccionalidad.

Bien, imaginemos que nuestra red tiene 5 páginas web, y que el grafo que representa las conexiones entre sus páginas es el siguiente:



¿Cómo interpretamos este grafo? La página web 1 enlaza a la web 5 y es enlazada por la 2, 3, 4 y 5. Así sucesivamente con el resto de páginas.

¿Y qué página es más importante? El Postulado PageRank dice lo siguiente:

La importancia x_j de la página P_j es proporcional a la suma de las importancias de las páginas que enlazan con P_j.

Es decir, será más importante mi página si además de enlazar a otras páginas es enlazada por páginas importantes. Será mucho mejor si conseguimos que nuestra página sea enlazada por Amazon.com que por una página sin apenas visitas.

El dibujo de un grafo es ilustrativo pero nosotros necesitamos operatividad, por lo que en lugar de utilizar el grafo dirigido vamos a considerar su matriz de incidencia.

La matriz de incidencia de nuestro grafo es:

$$M_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el primer modelo de Google la matriz de incidencia tenía un 1 en el lugar (i, j) si había un enlace desde p_i hasta p_j y un 0 si no lo había, pero más tarde se dieron cuenta de que si había un página con un solo enlace, este enlace valía lo mismo que cualquier otro enlace de otra página que produjese un millón de enlaces. Para solucionar esto se modificó el algoritmo Page Rank de la siguiente manera: Si hay un enlace desde desde p_i hacia p_j, en el que el lugar (i, j) de la matriz de incidencia se coloca el número . De esta forma en cada fila hay una distribución de números no negativos que suman 1, como si fuera una distribución de probabilidades sobre los nodos de internet. Este tipo de matrices se conoce como estocásticas por filas.

Por lo tanto nuestra nueva matriz de incidencia-estocástica es de la forma:

$$M_{I,E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De momento todo pinta muy bonito, pero no hemos tenido en cuenta en nuestro grafo que una página no es enlazada por ninguna otra, y esto en la red pasa continuamente: el grafo de Internet no es fuertemente conexo, ni siquiera es conexo. Por lo tanto, lo normal es que Google se encuentre con matrices de incidencia con ceros en más de una fila, matrices no regulares, ni diagonalizables algo que trae problemas a la hora de obtener resultados. ¿Qué hace el algoritmo Pange Rank ante esta situación? Perturba la matriz estocástica de la siguiente forma:

Sea $0 < \varepsilon < 1$

$$M^{\varepsilon}_{I,E} := (1-\varepsilon) \cdot M^{\varepsilon}_{I,E} + \varepsilon/n \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Donde n es el número de nodos (páginas web)

Al aplicarle ε volvemos a tener una matriz estocástica por filas, y además ahora nuestra nueva matriz $M^{\varepsilon}_{I,E}$ tiene todos sus coeficientes positivos, lo que facilita su operatividad.

Sigamos con nuestro ejemplo y calculemos la matriz perturbada de nuestro grafo.

El algoritmo Page Rank va variando varía el valor de ε, supongamos que ahora es $\varepsilon = 0{,}15$

$$M^{\varepsilon}_{I,E} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}455 & 0{,}03 & 0{,}455 \\ 0{,}88 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}313 & 0{,}313 & 0{,}03 & 0{,}313 & 0{,}03 \\ 0{,}313 & 0{,}313 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}313 \\ 0{,}313 & 0{,}313 & 0{,}313 & 0{,}03 & 0{,}03 \end{pmatrix}$$

Muy bien ya disponemos de una matriz en condiciones. Y, ¿ ahora qué?. ¿Cómo sabemos que página saldrá en la primera posición de nuestra búsqueda?

Aquí es donde entra en juego el Algebra Lineal y sus valores y vectores propios.

El algoritmo Page Rank tiene en cuenta el siguiente *Teorema:*

Si M_I es la matriz de incidencia del grafo de internet, y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \geq 0$, el vector de importancias, entonces se cumple $M_I^t x^t = \lambda x^t$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, es la constante de proporcionalidad.

Recordemos la definición de valor y vector de propio y así encontraremos la relación con el algoritmo Page Rank

Definición. Sea M una matriz cuadrada de orden n, $M=(a_{ij})$, tal que sus elementos a_{ij} son reales. Se llama *vector propio* de M a todo vector $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,n$, tal que $MX^t=\lambda X^t$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Al número λ se le denomina *valor propio* de M asociado al vector propio X

Por lo tanto, el vector de importancias de las páginas web es un vector propio (positivo) de la matriz M_I^t, y la constante de proporcionalidad λ es el valor propio asociado a este vector.

Volviendo a nuestro ejemplo, hallemos los valores y vectores propios de nuestra matriz de incidencia-estocástica *perturbada*. Para hacer los cálculos utilizamos Wolphram Alpha y la matriz traspuesta de $M^{\varepsilon}_{I,E}$.

$$M^{\varepsilon}_{I,E}=\begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}455 & 0{,}03 & 0{,}455 \\ 0{,}88 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}313 & 0{,}313 & 0{,}03 & 0{,}313 & 0{,}03 \\ 0{,}313 & 0{,}313 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}313 \\ 0{,}313 & 0{,}313 & 0{,}313 & 0{,}03 & 0{,}03 \end{pmatrix}$$

Ver todos los valores y vectores propios de $M^{t\varepsilon}_{I,E}$ en Wolframalpha. Notar que es una matriz diagonalizable: todos sus valores propios son simples.

De todos los posibles valores propios (aproximados) escogemos $\lambda=1$ (el único real y positivo)

Su vector propio asociado es en valor absoluto:

$$(0.67259,\ 0.363478,\ 0.463318,\ 0.194141,\ 0.403921)$$

Por lo tanto el orden en el aparecerían las páginas de nuestra red en nuestra búsqueda serian:

Página 1
Página 3
Página 5
Página 2
Página 4

Os dejamos como ejercicio que penséis, junto al grafo, la justificación del orden de importancia de las páginas.

Como ya habréis pensado, el grafo de Google es gigantesco y su matriz tiene más de un billón de entradas. Resolver una matriz de este tamaño, calcular su polinomio característico de grado billón, sus valores propios, vectores propios es muy costoso incluso para los ordenadores más potentes. Google soluciona este *problema* aplicando el método de las potencias. Aproximadamente dice lo siguiente:

Si una matriz cuadrada M es *diagonalizable* y tiene todos sus vectores $\{v_1,\ldots\ldots,v_2\}$ numeradas de tal manera que los vectores propios correspondientes cumplan lo siguiente

$\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_3|$ partiendo de $v_0 \geq 0$ tal que
$v_0 = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n,$ con $\alpha_1 \neq 0$, entonces se tendrá:
$M^K v_0 = \alpha_1 \lambda^K{}_1 v_1 + \ldots. + \alpha_n \lambda^K_n v_n,$

Luego

$$\mathrm{Lim}_{k\to\infty} \frac{M^k v}{\lambda^k} = \alpha_1 v_1$$

Es múltiplo no trivial del vector propio buscado.

Sin entrar en más detalles técnicos este es, a grandes rasgos, el método que utiliza Google para ordenar sus páginas. Hemos podido comprobar cómo la Teoría de Grafos, el Algebra Lineal y otras ramas de las Matemáticas son fundamentales en su funcionamiento. En definitiva podemos resumir: El algoritmo Page Rank de Google está basado en matemáticas. ¿Se lo contamos a nuestros alumnos?

Tocando la cuarta dimensión

por
Daniel Sierra Ruiz
(IES Zaurín, Ateca)

La idea de este taller parte de otro que impartió Covadonga Rodríguez-Moldes en las JAEM de Granada. Covadonga utilizaba cañas flexibles (de las de beber refrescos) para construir el hipercubo y los sólidos platónicos. Las cañas tienen que ser de las que tienen un fuelle que permite *doblarlas.* Otro tipo de cañas requieren cierta capacidad de visualizar el poliedro partiendo de su desarrollo plano. En este caso, se construyen las caras necesarias y se pegan con cinta adhesiva; este procedimiento permite que cualquier alumno, desde 1.º de ESO, construya cualquier sólido platónico, simplemente sabiendo el número y tipo de caras que tiene.

El proceso de construcción (véanse las imágenes de la figura 1), empieza con una cara, para lo cual tomo tantas cañas como lados tenga la cara. Como tengo cuatro colores, si hacemos triángulos o cuadrados podemos usar colores distintos para cada lado. Esto dará juego para otro tipo de *retos.* Para unir los lados, corto longitudinalmente las cañas en la parte más pequeña, justo hasta donde empieza el fuelle. Este corte nos permite introducir la parte corta de una caña en la larga de la otra y, repitendo el proceso, construir el polígono que busquemos. Una vez que tenemos todas las caras del poliedro, utilizamos cinta adhesiva para unirlas por sus vértices. Lo *feo* de esta construcción es que cada arista está compuesta por dos cañas. Sin embargo, si pedimos que esas dos cañas que forman una sola arista sean del mismo color, obligamos al alumnado a pensar cómo montar el poliedro. Como se ha dicho, de esta manera podemos construir cualquier sólido platónico en los primeros cursos de secundaria y en los últimos de primaria. Sin embargo, aquí utilizaremos este material para construir una representación del hipercubo en tres dimensiones.

El taller está pensado para 4.º de ESO y hay dos versiones. En la larga, se trata el concepto matemático de multidimensionalidad, eso sí, desde un punto de vista bastante intuitivo. En este artículo, hablaremos solo de la versión corta de la actividad. En ambos casos, para fundamentar el aspecto teórico se han utilizado como referencias los libros de Raúl Ibáñez y Rudy Rucker (ver referencias bibliográficas). Este último, así como los videos de *Dimensions* los considero regalos de Pedro Latorre. Por otra parte, cada vez que intentamos *saltar* a una dimensión superior a tres no podemos olvidar al cuadrado planilandés de Abbott.

El *objetivo* final del taller es construir un hipercubo, pero para llegar a él necesitamos que el alumnado asimile —o al menos que intuya— algunas cuestiones:

— Es posible representar un objeto tetradimensional en un espacio de tres dimensiones, al igual que somos capaces de representar un objeto tridimensional en un plano.
— Cada *salto* de dimensión añade un grado de libertad, una nueva *dirección* posible para el movimiento.
— La representación en tres dimensiones del hipercubo que construimos en este taller es consecuente con la que se presenta del cubo en dos dimensiones (ver figura 2).

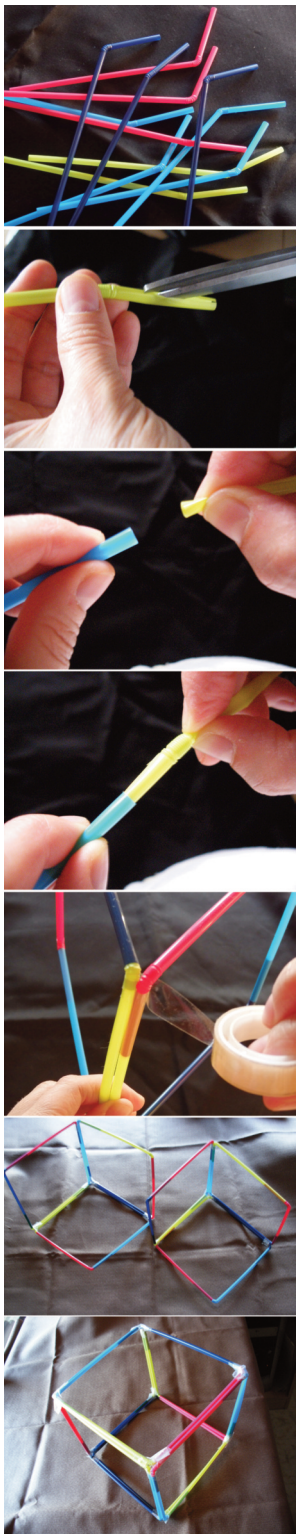


Figura 1

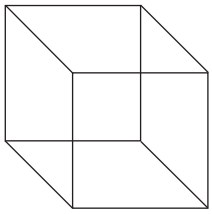


Figura 2

En el inicio del taller se presentan en pantalla varias imágenes que todos los alumnos identifican rápidamente como *cubos.* Al mostrarles un cubo *real,* se les hace ver la extraña situación que se da al llamar de la misma forma a un objeto de tres dimensiones y a unos dibujos de dos dimensiones. Lógicamente, el debate no se alarga demasiado antes de que alguien hable de una representación, o algo similar, en dos dimensiones de un objeto de tres dimensiones. Así, concluimos que lo que realmente vamos a hacer no es construir un hipercubo, sino una representación tres-dimensional de él.

A continuación pasamos a analizar como se puede producir el paso de una dimensión a otra. Para ello utilizamos la sencilla construcción de GeoGebra (preparada por Ricardo Alonso) que podemos ver en el siguiente enlace. En ella, partiendo de un punto, el paso a dimensión uno es que el punto se mueva en una dirección. Ya tenemos un segmento que se convierte en un cuadrado al moverlo en una nueva dirección perpendicular. Pasando a la tercera dimensión, utilizamos dos cuadrados de cartón unidos por *caras* de papel: empezamos con uno encima de otro y los separamos para que *aparezca* el cubo. A partir de ahí, lo que pretendemos es que el alumnado entienda que el hipercubo surgirá al desplazar el cubo en una nueva dirección que, lógicamente, nosotros no podemos observar, al igual que un planilandés no puede ver la dirección *vertical*.

Llega el momento en el que hay que intentar visualizar qué tenemos que construir. Observando la figura 2, resulta que todo el mundo ve un cubo cuando, en realidad, son dos cuadrados, con el vértice de uno de ellos en el centro del otro y uniendo los vértices de ambos cuadrados con aristas. *Subiendo* una dimensión cada uno de estos elementos, nuestra representación consecuente del hipercubo serán dos cubos, con el vértice de uno de ellos en el centro del otro y de tal forma que unimos sus aristas correspondientes mediante caras.

En la última imagen de la figura 1, se ve un cubo; como ese, han de construir dos. Añadimos alguna complejidad. De entrada, les pedimos que encuentren todas las configuraciones posibles distintas de cuadrados que podemos hacer con cuatro colores distintos. Cuando lo comprenden, no es difícil lograr que construyan las tres posibles. Deben hacer dos cuadrados de cada una de las configuraciones. Lo mejor es que construyan un triedro con tres cuadrados *distintos* haciendo coincidir los colores. Luego deben montar el otro triedro *en espejo,* y pegar ambos para formar el primer cubo. El segundo es más rápido, pues solo deben *copiar* el primero, eso sí, teniendo la precaución de montarlo con un vértice en el interior del primero. Ya solo queda unir las doce aristas con otras tantas caras. En la figura 3, se puede ver un hipercubo hecho en la semana matemática del curso 2014-2015 en el IES de Albarracín. En este enlace podemos verlo animado en un fragmento de *Dimensions.*

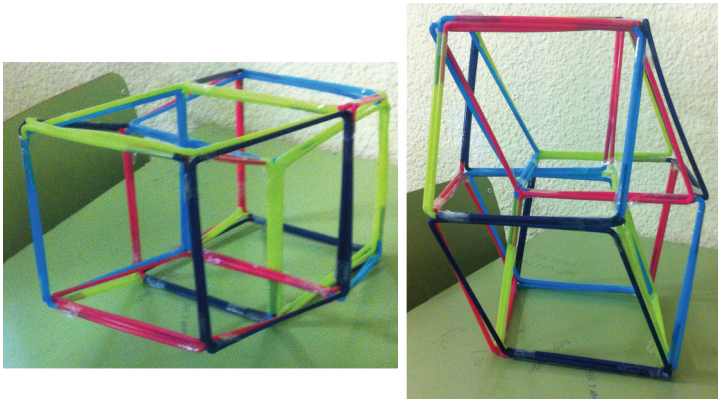


Figura 3

Referencias

ABBOTT, E. (2014), *Planilandia. Una novela de muchas dimensiones,* José J. de Olañeta (editor), Palma de Mallorca.

IBÁÑEZ, R. (2010), *La cuarta dimensión. ¿Es nuestro universo la sombra de otro?,* col. El mundo es matemático, RBA, Barcelona.

RODRÍGUEZ-MOLDES, C., y otros (2007), «Entrando en la cuarta dimensión: construcción de un hipercubo», *Actas de las XIII JAEM*, SAEM Thales, Granada

RUCKER, R. (1987), *La cuarta dimensión,* col. Biblioteca Científica Salvat, Salvat, Barcelona.

www.dimensions-math.org/Dim_ES.htm

Realización de una semana matemática

por

Joaquín Comas Roqueta; Caridad Gálvez García; Antonio Jurado Martínez; Dolores Martínez Belchí; Alicia Martínez Henarejos; Noelia Navas Martos; M.ª Isabel Lucas Cortés; Miguel Peñalver Sánchez; Ana María Pérez-Nieto Mercader; Iris Ros Roelas; Pedro Sandín Antúnez; Mª Isabel Salas Vizcaíno

(IES Sierra Minera, La Unión, Murcia)

El año 2000 fue declarado por la UNESCO «Año Mundial de las Matemáticas» y el I.E.S. Sierra Minera (La Unión, Murcia) quiso unirse a las celebraciones. Se pensaron distintas ideas con el objetivo de dinamizar las clases de matemáticas y la que más entusiasmó fue la de organizar una Semana Matemática en la que se mostrara que las Matemáticas se encuentran en la vida cotidiana, siempre a nuestro alrededor.

Además, se consideró que la participación de profesores de diversas asignaturas sería muy enriquecedora al permitir ofrecer una visión de las Matemáticas mucho más amplia de la usual. La realización de cada semana temática resultaba muy enriquecedora y nos animaba a pensar en la siguiente. De esta manera hemos llegado a organizar un total de diez.

Como en cualquier experiencia han surgido inconvenientes, dificultades y algún que otro contratiempo, pero el esfuerzo realizado ha propiciado unas clases más dinámicas, motivadoras, y a su vez más divertidas a lo largo de cada curso. La realización de las Semanas Matemáticas ha supuesto un importante acercamiento de los alumnos al mundo de las Matemáticas sirviendo de plataforma para redescubrirlas y para que todos los alumnos participantes en ellas hablen de Matemáticas y descubran las investigaciones y curiosidades que se exponen en clase.

Así pues, la actividad que aquí se presenta es una herramienta muy interesante para HACER, DESCUBRIR y HABLAR de matemáticas disfrutando con ellas.

Las Semanas Matemáticas, en todas sus ediciones, han sido un elemento dinamizador para realizar un verdadero trabajo a nivel de centro en el que todos nos hemos sentido partícipes del trabajo común y de las ganas de llevar a cabo proyectos entre todos los miembros de la comunidad educativa.

Por todo ello, la X edición se presentó con el eslogan C.Q.D. (como queríamos demostrar) y no fue elegido por casualidad sino porque realmente resumía lo que habíamos hecho hasta llegar ahí, demostrar que mediante un trabajo interdisciplinar se pueden mejorar las actitudes y capacidades de los alumnos en matemáticas y además disfrutando y divirtiéndonos tanto profesores como alumnos.

Momento de la X Semana Temática

¿Qué es una semana matemática?

Idea de la actividad

Como ya se ha comentado, la celebración del *Año Mundial de las Matemáticas* nos impulsó a realizar actividades que mejorasen las actitudes y las capacidades de los alumnos en matemáticas a través de un trabajo interdisciplinar en el que participasen profesores de diversas asignaturas para dar así a las Matemáticas una visión mucho más amplia de la usual.

Todas las Semanas Matemáticas, las últimas llamadas Semanas Temáticas, han sido una gran muestra en la que cada grupo de alumnos va pasando por una serie de aulas-taller con un orden previamente establecido, de forma que cada cierto tiempo van rotando los grupos por todas las aulas, sin coincidir dos grupos en una misma aula. En este evento, que se realiza durante varios días, se invita a participar a otros centros y se agrupa a los alumnos por niveles educativos. Creemos importante destacar que son los propios alumnos del centro organizador, es decir, los alumnos del IES Sierra Minera (La Unión, Murcia), los que han realizado los trabajos durante el curso, los que presentan y controlan las diferentes aulas, adquiriendo así una mayor responsabilidad y entrega a la hora de realizar esta actividad. Esto los motiva y hace que su actitud a la hora de trabajar durante todo el proceso sea la mejor.

Tarjeta de Grupo

Para dotar a las Semanas Matemáticas de un carácter lúdico, cada grupo lleva una tarjeta identificativa con el nombre de un matemático conocido y en el reverso, antes del comienzo de la actividad, debe escribir la clase a la que pertenece, el nombre de los componentes del grupo y el del alumno que ejercerá de capitán. La utilidad de esta tarjeta es doble, por un lado, sirve para llevar un control de los alumnos y, por otro, para anotar la puntuación que obtiene el grupo en cada aula. La puntuación en cada aula la determina uno de los alumnos responsables de la misma, en lugar de ser *impuesta* por profesores pues se ha comprobado que, en general, admiten mejor la puntuación dada por los compañeros responsables del aula y se evitan protestas de los alumnos con baja calificación. Al final del recorrido por todas las aulas el representante de cada grupo debe entregar la tarjeta para, posteriormente, premiar a los componentes del grupo con mayor puntuación con un obsequio.

Mesa de Información

Con el fin de resolver cualquier duda que pueda surgir durante el desarrollo de la semana se instala una Mesa de Información integrada por varios alumnos. Además, dicha mesa tiene la función de dar la bienvenida a los centros visitantes y proporcionarles toda la información que puedan requerir.

Tarjeta de Votaciones

Dado que a lo largo del recorrido por las diferentes aulas los alumnos deben explorar los diversos trabajos realizados durante el curso, se ha diseñado una tarjeta para cada alumno participante donde debe ir eligiendo el elemento que más le ha gustado dentro de cada sección, lo que nos proporciona una información muy valiosa para organizar ediciones posteriores. Entre todas las papeletas recogidas se realiza un sorteo con premios para los ganadores con el objetivo de que los alumnos presten mayor atención a la vertiente expositiva de la Semana Matemática.

Factoritrón

Al finalizar cada jornada se realiza una versión reducida del campeonato de habilidad matemática «Factoritrón» en el que participa una pareja de cada centro. El principal objetivo de esta actividad es fomentar y desarrollar el cálculo, especialmente, la factorización de números de una forma amena y divertida. Se realizan varias semifinales y una gran final en un ambiente lleno de sana competitividad y emoción tanto de los participantes como de los espectadores.

Momento del Factoritrón

Espectáculos matemáticos

También se ofrece a todos los centros visitantes un espectáculo con contenido matemático. Los que han tenido una mayor aceptación han sido el Coro del teorema de Thales interpretando la famosa canción del Les Luthiers y la es-

cenificación de la divertida canción «la Cumbia Matemática», ambos interpretados por alumnos y profesores del centro IES Sierra Minera.

Ediciones de la semana matemática

Pasamos a describir brevemente las diez ediciones realizadas para centrarnos posteriormente, y a modo de ejemplo, en las actividades desarrolladas en la X Semana.

I Semana Matemática (curso 1999-2000)

Se realizó en el gimnasio del centro I.E.S. Sierra Minera y constó de siete aulas cuyas temáticas fueron: Lengua, Ciencias Naturales, Enredos de Ingenio, Juegos Matemáticos, Idiomas, Taller de Matemáticas y Exposiciones.

http://centros5.pntic.mec.es/~sierrami/sierraminera/departamentos/sierramates/html/sierramates.htm

II Semana Matemática (curso 2000-2001)

Se realizó en el gimnasio y patio del centro I.E.S. Sierra Minera siendo las temáticas de las aulas las siguientes: De Mates ...¿Ná?, Poliedros Gigantes, El Espejo Mágico de Escher, El Mercado Geométrico de La Unión, Juegos Matemáticos 1 y 2 , El Mundo de las Teselaciones e Instrumentos de Medida.

http://centros5.pntic.mec.es/~sierrami/dematesna/demates12/opciones/IISMsabiasdpto.htm

III Semana Matemática (curso 2001-2002)

Fue la primera ocasión en que se realizó la actividad en el antiguo Mercado Público de La Unión (Murcia), sede desde entonces de todas la Semanas que se han organizado. Las temáticas de las aulas fueron: De Mates ...¿Ná?, La Torre de Babel, Matecultura, El Mundo de los Poliedros , Mapas del Mundo , Mategolf, ¿Dónde Estamos? , Relaciones Humanas y Miscelánea.

http://centros5.pntic.mec.es/~sierrami/dematesna/demates12/opciones/IIISemanaMatematica/IIISMindexdpto.htm

IV Semana Temática (curso 2002-2003)

En esta edición se pensó que podía ser interesante para el centro seguir con una actividad de este tipo pero cambiando de temática, por lo que se decidió cambiar el nombre de la actividad pasando a llamarse «Semana Temática», pues no se quería perder el largo camino recorrido. El eje motivador en esta edición fue el 25 aniversario de la Constitución, y la colaboración del Departamento de Matemáticas estuvo relacionada con las matemáticas electorales.

http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates23/opciones/Matenoticias/IVS%20Semana%20Tematica%20Mates%20Electorales/index.htm

V Semana Temática (curso 2003-2004)

El eje motivador volvieron a ser las matemáticas, bajo el eslogan, π_{KT} X las Mates

siendo la temática de las nueve aulas: Orientándonos, Torre de Babel, Naturaleza Matemática, Administración Segura, Juegos Matemáticos, Matecultura, De Mates... ¿Ná?, Fractalmanía y Miscelánea.

http://centros5.pntic.mec.es/~sierrami/dematesna/indexvst.htm

Carteles de las Semanas Matemáticas

VI Semana Temática (curso 2004-2005)

En esta edición el eje motivador fue el IV centenario de El Quijote, y la colaboración del Departamento de Matemáticas estuvo relacionada con instrumentos y medidas tradicionales.

http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates45/opciones/sabias/Expo%20Instrumentos%20Tradicionales/indice%20de%20instrumentos%20tradicionales.htm

VII Semana Temática (curso 2007-2008)

A partir de esta edición se han mantenido las matemáticas como eje motivador pero pasaron a realizarse cada dos años, realizándose en esta y en la siguiente edición un preestreno durante el primer curso para ir preparando actividades.

El eslogan, retomando el de la última edición y actualizándolo, fue Reπkt X las Mates. Las temáticas de las nueve aulas fueron: Estratecno, Sociomática, La torre de Babel, El canto de un duro, El Laberinto, Plásmate, Eureka, ¿Qué dices? y Galimates.

http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates78/opciones/vii%20semana%20tematica/index%20vii%20st.htm

VIII Semana Temática (curso 2009-2010)

La temática fue más específica, centrada en los fractales, bajo el eslogan πk2 X los Fractales. Las temáticas de las aulas fueron las siguientes: Monopoly fractal, Plásmate, Fractalmanía, El recorrido, Enredo musical, Caja de los sentidos, Eureka, La torre de Babel y Estratecno.

http://www.dematesna.es/index.php?option=com_content&view=section&id=18&Itemid=173

IX Semana Temática (curso 2011-2012)

La temática en torno a las Matemáticas volvió a ser más general con el eslogan COMEMATES. Las temáticas de las aulas fueron las siguientes: + Palabras, Plásmate, Rummicocos, El Laberinto, Rompecocos, Eureka, ¿Lo pillas?, Tiranteces y La torre de Babel.

http://www.dematesna.es/index.php?option=com_content&view=section&id=22&Itemid=215

X Semana Temática (curso 2013-2014)

En la décima edición se ha pretendido recoger la esencia de todas las ediciones anteriores bajo el eslogan C.Q.D. En el siguiente apartado se describen sus aulas y actividades.

http://www.dematesna.es/index.php?option=com_content&view=section&id=23&Itemid=215

Realización de la X Semana Matemática

Como ya se ha comentado, el lema de la décima edición *C.Q.D.* (*como queríamos demostrar*), es una constatación de que tanto profesores como muchísimos alumnos disfrutamos con las matemáticas.

La actividad se realizó en el antiguo Mercado Público de La Unión (Murcia), del 12 al 19 de febrero de 2014 con una gran asistencia de centros invitados. Cada día participaron aproximadamente 300 alumnos (lo que hace un total de 32 centros participantes y más de 1800 alumnos).

A continuación se describe brevemente en qué consistía cada aula de esta edición. Algunas aulas recogían actividades «exitosas» de ediciones anteriores mientras que otras han sido de nueva creación.

El Laberinto

Para realizar esta actividad se formaban cuatro equipos de unos seis integrantes. Consistía en una carrera de orientación por todo el Mercado Público con siete estaciones. Cada equipo disponía de un mapa del Mercado para buscar las estaciones. Una vez en ellas, un monitor les daba a elegir por sorteo un número u operador (+,-. ·,:).

Cuando el equipo tenía los siete números o signos volvía al aula y utilizando todos ellos en una operación matemática debía conseguir el valor más alto posible.

Aula El Laberinto

Plásmate

En esta actividad los alumnos debían crear un cuadro al estilo de Piet Mondrian, artista que utilizaba las matemáticas para realizar sus obras. Sólo podían utilizar líneas paralelas, perpendiculares y colores primarios, es decir, rojo, amarillo, azul, negro y por supuesto el blanco del papel. Para ello, se les entregaban siete pegatinas y ceras de colores (si se ordenan las pegatinas se forma un folio, de manera que se podía crear una obra como si fuera un puzzle, o siete obras distintas). Una vez finalizado el trabajo, las pegatinas debían colocarse en cualquier lugar del aula, que estaba forrada totalmente de blanco, con el objetivo de crear entre todos un gran fractal.

Estratecno

En esta aula los visitantes tenían que buscar estrategias en varios juegos relacionados con las matemáticas, todos ellos realizados en el centro. Cabe destacar la realización a tres escalas (normal, miniatura y gigante) de los juegos de estrategia «Atascos» y «Tipover», junto con el clásico juego de las Torres de Hanoi.

Sociomática

En esta aula se presentaron actividades en las que se relacionaban las Matemáticas con las Ciencias Sociales, las Religiones y la Numerología. El aula estaba dividida en dos subactividades. En la primera de ellas, se realizaban figuras anamórficas a partir de plantillas de distintos niveles de dificultad. En la segunda actividad, los alumnos participaban en un juego de tablero gigante donde las fichas eran los propios alumnos y en el que las preguntas estaban relacionadas con una exposición de sellos matemáticos de todo el mundo. Finalmente, los alumnos debían rellenar unos cuestionarios sobre lasReligiones y la Numerología a partir de unos paneles explicativos.

La Torre de Babel

En esta aula los alumnos se introducían en un fascinante Cementerio Matemático en el que en cada tumba se podía leer el nombre, fecha de nacimiento, fecha de muerte y un epitafio (en una placa) de un famoso matemático, todo ello en inglés y francés. Los alumnos visitaban el cementerio y debían rellenar un cuestionario para saber quién era quién.

Aula La torre de Babel

Eureka

En esta aula el visitante se encontraba con una serie de actividades. En primer lugar, los monitores presentaban y explicaban experimentos relacionados con la física y/o química (como por ejemplo, la cromatografía frac-

tal o la física y geometría de las pompas de jabón) que luego debatían con los visitantes. Otras actividades estaban relacionadas con las ciencias naturales, en éstas los participantes disponían de una tarjeta personal que completaban conforme realizaban el cálculo de su masa, altura, relación altura/ombligo, índice de masa corporal, tasa metabólica basal y su peso en diferentes planetas.

Aula Eureka

¿Lo pillas?

Esta aula estaba dividida en dos partes. En la primera, los alumnos debían calcular el resultado de una operación matemática que se iba viendo y escuchando al reproducirse uno de los videoclips que conocidos artitas realizaron versionando sus propias canciones para un programa televisivo, o una de las versiones realizadas por el coro de nuestro centro. La segunda parte, consistía en usar las matemáticas para observar los peligros que corremos debido a la multitud de ruidos presentes en nuestras vidas. Por último, se debían formar parejas, a cada una de ellas se les entregaba una tarjeta con una figura geométrica o una operación de cálculo y uno de los miembros debía explicársela por teléfono o mediante mímica a través de una cámara a su compañero.

Aula + Palabras

+ Palabras

Esta aula también estaba dividida en dos partes. En la primera, los alumnos visitaban la exposición de «poemas-móviles» y de «mate-relatos» realizados en el centro y, seguidamente debían elaborar su propio «mate-relato» siguiendo las instrucciones de los monitores. La segunda parte, consistía en resolver dos roscos completos del conocido juego televisivo Pasapalabra sobre conceptos matemáticos. Para ello, los alumnos se colocaban en fila por parejas, rotando a medida que avanzaban las letras del abecedario; de esta forma, si acertaban pasaban al final de la fila para dejar a la nueva pareja su oportunidad, pero si fallaban, tenían que obtener la respuesta correcta privados del sentido de la vista, el oído o la movilidad.

Aula Monopoy Fractal

Monopoly Fractal

En esta aula se dividía al grupo en tres subgrupos para realizar distintas actividades. Una de ellas era el juego Rummycocos, basado en el juego de tablero Rummy, consistía en hacer combinaciones numéricas con la finalidad de ser el primero en desprenderse de todas las

fichas sobre el panel. Otra actividad fue el Monopoly Fractal, inspirado en el clásico juego del Monopoly, donde el tablero emulaba una estructura fractal y las calles eran de la localidad de La Unión. La tercera de las actividades, denominada Miscelánea, consistía en desplazarse por el Mercado Público junto con un monitor que hacía de guía para poder observar un Omnipoliedro con el que comprobar el Teorema de Euler, el crecimiento armónico en la planta llamada vulgarmente «pita» o «arcibarón» y contemplar el Teorema de Thales al tumbarnos en una camilla y mirar el techo del Mercado.

Conclusiones

La realización de cada una de las Semanas Matemáticas ha supuesto un importante acercamiento de los alumnos al mundo de las Matemáticas, proporcionando elementos motivadores para las asignaturas de Matemáticas de los diferentes cursos y, sirviendo de plataforma para redescubrirlas.

Se ha comprobado que son un medio idóneo para que tanto los propios alumnos del IES Sierra Minera como los alumnos de los centros visitantes hablen de Matemáticas mostrándoles las investigaciones y curiosidades que se realizan y exponen en clase. Han sido, en todas las ediciones, un elemento dinamizador para realizar un verdadero trabajo a nivel de centro en el que todos nos hemos sentido partícipes del trabajo común y de las ganas de llevar a cabo proyectos que mejoren el nivel académico y las relaciones entre todos los miembros de la comunidad educativa.

La periodicidad de las Semanas Matemáticas empezó siendo anual, pasando posteriormente a celebrarse cada dos años y a partir de la décima edición pasan a tener carácter trienal, estando prevista su celebración el próximo curso 2016-2017.

Finalmente, queremos destacar que progresivamente se han ido alcanzando los objetivos que se habían propuesto y que, además, se ha llegado a formar un grupo de trabajo de profesores que a través de un trabajo interdisciplinar ha conseguido mejorar las actitudes y las capacidades de los alumnos en Matemáticas.

Si se quiere obtener más información sobre las Semanas Matemáticas y otras actividades matemáticas realizadas en el Instituto Sierra Minera de La Unión se puede visitar la página realizada por nuestros alumnos «De Mates...¿Ná?» (www.dematesna.es).

Logo de la X Semana Temática

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Mario Escario Gil (IES Pirámide, Huesca).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Web: <http://sapm.es>

Noviembre de 2015
ISSN: 2386-8821e