Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 32
Enero de 2020

Cuando hace algo más de cinco años nos lanzamos a publicar *Entorno Abierto*, hubo algunas opiniones al respecto de que la periodicidad bimestral es excesivamente exigente y augurándole una vida no demasiado larga. Con mucho esfuerzo de unas cuantas personas y gracias a las colaboraciones recibidas, hemos llegado al número 32. Las malas noticias son que este número que acabas de abrir es uno de los más *raquíticos* que hemos puesto en circulación. Así que os queremos animar a participar en esta publicación que «aspira a ser un lugar de intercambio de experiencias en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, realizadas en Aragón». En nuestra comunidad hay un gran número de interesantes experiencias didácticas y compartirlas es una buena manera de colaborar en la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Todo grano hace granero, por pequeño que sea.

Y ahora, va de concursos. Quizás lo más reseñable de la actividad de la Sociedad en estos momentos, sean los diferentes concursos cuya inscripción está abierta o se va a abrir en fechas próximas.

En este curso tenemos que hablar de olimpiadas, en plural. A la ya más que tradicional de segundo de ESO (29 ediciones), se une la ampliación a adultos (en vía paralela) y la primera convocatoria de la alevín (para quinto y sexto de primaria). Toda la información sobre las olimpiadas, en el siguiente enlace.

Asociados al programa Conexión Matemática, ya están abiertas las inscripciones al VII Concurso de Radionovelas Matemáticas y al V Concurso on-line de Tangram. Próximamente se abrirá la del IV Concurso de Figuras Imposibles. La información sobre estos concursos en la web del programa <conexionmatematica.catedu.es>.

Estos concursos van destinados al alumnado, pero nosotros somos una sociedad de profesores, así que, en realidad, nosotros estamos apuntando a los docentes. No se trata de entrenar a un pequeño grupo de alumnos para que se presenten a la Olimpiada; lo que buscamos es que se trabaje la resolución de problemas en el aula, de manera sistemática. O, por ejemplo, el concurso de radionovelas persigue impulsar el trabajo multidisciplinar: podemos involucrar a los compañeros de lengua, de tecnología, de idiomas…

Y la SAPM sigue manteniendo abiertos otros frentes, como el grupo de trabajo de Historia de las Matemáticas. Este año 2020 se cumplen los 300 años del nacimiento de Andresa Casamayor, así que es una excelente ocasión para reivindicar a esta zaragozana, precursora de la enseñanza matemática en España.

Presencia en seminarios de la FESPM (con trabajo local para prepararlos), Conexión Matemática…., y en mayo matemáticas en la calle en Teruel. Seguiremos informando.

Daniel Sierra Ruiz
Presidente de la SAPM

En el súper

En este bloque se simulan las compras en un supermercado mediante un entorno gráfico en el que encontramos una estantería con los productos, una lista de la compra, un conjunto de monedas para pagarla y un recipiente en el que depositaremos la compra. Además, en la primera actividad, se reserva una zona de la pantalla para realizar cálculos.

En ambas aplicaciones, el alumnado cuenta con una cantidad de dinero y unos productos disponibles. La solución al problema es abierta, porque con el mismo dinero se puede decidir comprar unos productos u otros. La diferencia entre la primera actividad, *Pago las compras*, y la segunda, *¿Qué compro?*, radica en la variedad de soluciones posibles. En la primera se proporciona a los niños una lista de productos que deben «recoger» en la estantería y, posteriormente, calculan el dinero que les costaría realizar esa compra. La única variación se pude introducir si deciden coger más de un artículo del mismo tipo. Sin embargo, en la segunda actividad, la aplicación solo proporciona el dinero disponible y con él, el alumnado decide qué artículos compra. Lógicamente, en este caso el número de posibles soluciones es mayor.

Figura 3. Pago las compras

Figura 4. ¿Qué compro?

Comprando ropa

Este capítulo consta de cinco actividades que se desarrollan todas en el mismo entorno: un escaparate con prendas con el precio marcado en una etiqueta. A partir de esta situación, cada una de las cinco actividades propone distintos elementos como una cantidad de billetes y monedas, o listados de compra que llevarán al alumnado a resolver las diferentes propuestas que se plantean. Las prendas del escaparate se pueden arrastrar fuera de este para destacar las elegidas para la compra.

En *Billetes y monedas* se simula la situación cotidiana de la compra de diferentes productos, que cambian aleatoriamente al reiniciar la actividad. Para ello se dispone de cierto número de monedas y billetes y de un espacio para que el alumnado realice los cálculos que necesite: suma del dinero disponible, suma del dinero necesario, resta de ambos, en su caso, para ver cuánto nos sobra…

Figura 5. Billetes y monedas

La diferencia con la siguiente actividad, *¿Qué puedo comprar?*, radica en la ausencia de propuesta de compra. Se ofrece una cantidad de dinero y el alumnado debe comprobar qué grupos de artículos podría comprar y decidir cuáles se lleva. La actividad incluye tres espacios separados por líneas verticales para desarrollarla por grupos de manera que se puedan hacer varias propuestas diferentes de compra con la misma cantidad de dinero. Otra opción es que el profesor plantee tres compras diferentes y pregunte si son posibles las tres, si sobra dinero en alguna, cuánto… Las posibilidades son muchas dado el carácter abierto de la actividad.

Figura 6. ¿Qué puedo comprar?

La tercera propuesta, *¿Cuánto tengo que pagar?*, introduce un cambio importante en la dificultad de resolución. En ella se proponen diferentes ofertas con un formato similar al que podemos encontrar en las tiendas reales: en forma de descuentos por porcentajes, ofertas del tipo 3x2 o productos gratis a partir de cierto importe de la compra. La labor del alumnado se centra en calcular, como indica el título, el coste de la compra que se propone. Los datos (productos y oferta) cambian al actualizar la actividad.

Figura 7. ¿Cuánto tengo que pagar?

Figura 8. Mis ofertas

Mis ofertas continúa en la línea de la actividad anterior. En este caso se concreta el número de prendas que se deben comprar y la oferta que se aplica. El alumnado decide cuáles del escaparate serán las elegidas y calcula el importe, teniendo en cuenta los descuentos. También dispone de un espacio para realizar cálculos con la herramienta lápiz. El profesor puede fomentar el análisis sobre las opciones que interesan más: si comprar prendas de precios muy dispares, o de precios altos, etc. Otra manera de abordar este material podría ser el trabajo en pequeño grupo, de modo que en cada uno se hiciera una propuesta de compra por separado, poniéndolas en común posteriormente y discutiendo entre todos cuál cuál de ellas es más ventajosa por implicar un ahorro mayor.

Se cierra el capítulo con una actividad similar a la inicial: *Voy de rebajas*. En este caso se fija el dinero disponible, en lugar de las prendas que hay que comprar. Este cambio posibilita la adaptación de la actividad, de manera que el profesorado puede pedir cuál es el número mínimo (o máximo) de prendas (iguales o no) que se pueden comprar con esa cantidad, gastando todo el dinero, y teniendo en cuenta la oferta que se presenta. Este tipo de actividades amplían el número de posibles resultados diferentes válidos y fomentan la discusión y defensa verbal de las soluciones propias entre el alumnado. Como en actividades anteriores, aparecen las tres zonas de escritura que invitan a la actividad en grupo, de manera que se puedan confrontar las soluciones aportadas por diferentes grupos.

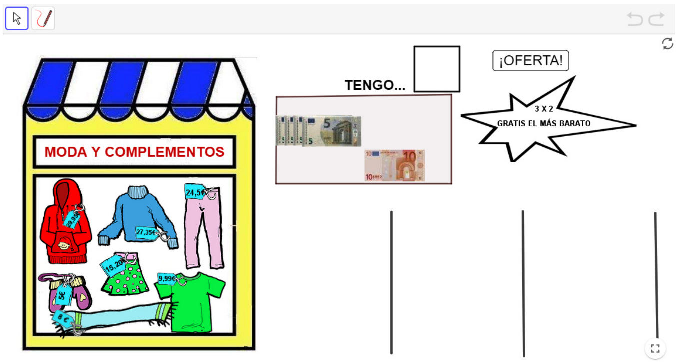

Figura 9. Voy de rebajas

Estas actividades se pueden complementar y enriquecer utilizando material manipulativo: billetes y monedas de uso escolar. Ante la propuesta en la PDI, el alumnado maneja sus materiales individualmente o en grupo y hace sus propuestas de comprar, que el representante del grupo llevará a la PDI para su discusión entre toda la clase.

Los materiales que se presentan en este artículo invitan al profesorado a proponer el trabajo en equipo, con la posterior puesta en común y discusión de las soluciones encontradas.

La versatilidad de la PDI, que cambia las condiciones iniciales del planteamiento al reiniciar la actividad, combinada con la manipulación física de monedas y billetes, enriquece las situaciones de aprendizaje.

Referencias

ARSAC, G., G. GERMAIN, y M. MANTE (1988), *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon.

BARBA, D., y C. CALVO (2013), «Calcular usando el contexto del dinero», *Suma,* n.º 72, 91-98.

CAWLEY, J. F., y J. H. MILLER (1986), «Selected views on metacognition, arithmetic problem solving, and learning disabilities», en *Learning Disabilities Focus*, 2 (1)), 36-48.

GASCÓN, J. (1994), «El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas», *Educación matemática*, 6(03), 37-51.

JUIDÍAS, J., e I. RODRÍGUEZ (2007), «Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos», *Revista de educación*, n.º 342, 257-286.

POLYA, G. (1981), *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problema solving*, Combined Edition New York, Wiley and Sons. Inc.

La martingala. Concursos en la web

por
Pedro Latorre García
(CPEPA Gómez Lafuente, Zaragoza)

Mis asiduos lectores conocen mi afición por el azar. Algunos juegos dependen enteramente del caprichoso azar y no de las habilidades de los participantes, a pesar de que muchos crean lo contrario. Nos centraremos en uno de ellos, la ruleta francesa, típico juego de casino. Einstein decía que para ganar en el casino o eras el dueño o conseguías atracarlo, situaciones no muy habituales. La ruleta es un juego sin memoria. Aunque salga tres veces seguidas el mismo número, la probabilidad de que vuelva a salir no disminuye. Una interpretación errónea de la Ley de los Grandes Números conduce a pensar lo contrario. El equilibrio entre los números no se produce en un breve intervalo de jugadas, puede demorarse de forma arbitrariamente grande.

En la ruleta francesa apuestas por un número comprendido entre el cero y el treinta y seis. Dieciocho números tienen el color rojo, otros dieciocho el negro y el cero es verde. Escojamos el rojo. Si acertamos, el casino premia con la cantidad jugada. El valor esperado de nuestra ganancia es:

$$\text{Ganancia esperada} = 1 \cdot (18/37) + (-1) \cdot (19/37) = -0{,}027$$

Por tanto, lo mejor es jugar pocas veces y lo ideal no jugar. El casino paga como si no estuviera el cero, no compensando el riesgo de la apuesta, cuando debería pagar 1,06 € para que el juego fuese equitativo. En este caso la ganancia esperada sería cero.

Sin embargo, hay un método en apariencia infalible para ganar, la denominada martingala. Funciona de la siguiente forma: elijo la cantidad a apostar, por ejemplo 1 €. Si acierto, entonces vuelvo a jugar la misma cantidad y si pierdo duplico mi apuesta hasta que gane, cosa que debe ocurrir en algún momento. Por ejemplo, si el rojo tarda en salir 6 jugadas, apostaré sucesivamente 1, 2, 4, 8, 16, 32 y la banca me abonará 64 € con lo que ganaré 1 €.

El problema de la martingala es afrontar las malas rachas. En este contexto, una racha es una sucesión consecutiva de jugadas en las que no sale nuestro color. Haciendo cuentas, si tarda 11 veces en salir el rojo tendremos que disponer de un capital de $2^{11} - 1 = 2047$ € para superar esa racha. Por si a algún imprudente y aburrido acaudalado se le ocurre jugar, el casino limita la apuesta máxima. Suponiendo que esta ascendiera a 10 000 € seríamos capaces de cubrir una racha de longitud 13.

La pregunta es evidente, por término medio ¿cuánto tarda en aparecer una racha de una longitud determinada? La teoría dice que jugando n veces, la racha más larga es aproximadamente $-\log_p n(1-p)$, siendo $p = 19/37$ la probabilidad de que no salga rojo. En la gráfica de la figura 1, con 200 tiradas se llega a una racha de siete y, con 400, de ocho.

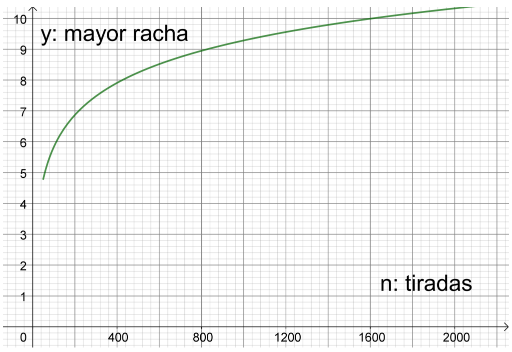

Figura 1

Por tanto, las dos premisas para que la martingala sea infalible necesitamos disponer de un crédito ilimitado y poder apostar sin límite, situaciones que no ocurren en el mundo real. En el famoso casino de Montecarlo en 1913, la bola cayó en negro 26 veces seguidas. Con este método, tendríamos que jugarnos en la vigesimosexta apuesta $2^{25} = 33\,554\,432$ y el monto total de la racha sería el doble menos uno.

Tengo preparada desde hace tiempo una sencilla aplicación que simula los tiros de la ruleta. Es sencilla de usar. Se elige la racha más larga superable por nuestra economía virtual y jugamos hasta nuestra ruina.

El alumno podría hacer diez simulaciones y calcular la media de los tiros hasta el fatal desenlace. También podríamos preguntarle si hay mucha variación entre los valores obtenidos. La aplicación está disponible en <http://conexionmatematica.catedu.es/martingala> (figura 2).

Figura 2

Concursos en la web de Conexión Matemática

Este curso vamos a celebrar a través de la página web del programa Conexión Matemática nuestros tradicionales concursos. El primero es el V Concurso de figuras imposibles. Está dirigido a los alumnos de Educación Secundaria, Formación Profesional Básica y Bachillerato de los centros educativos de Aragón y también a los alumnos de cualquier nivel educativo de los Centros de Educación de Personas Adultas de Aragón. Los participantes tienen que construir en papel, cartulina u otro material una de las figuras imposibles que se les proponen en la web, dejando también abierta la opción de un diseño libre. La novedad de este curso es que habrá una modalidad virtual. Habrá que realizar una construcción trabajando con una versión simplificada de Three.js.

Figura 3

También se va a desarrollar la quinta edición del Torneo de tangram dirigido a los alumnos de Primaria, de 1.º y 2. º curso de Educación Secundaria, de Formación Profesional Básica de los centros educativos de Aragón y a los alumnos de cualquier nivel educativo de los Centros de Educación de Personas Adultas de Aragón. En la modalidad Torneo los participantes se enfrentan al reto de resolver 50 figuras, organizadas en 4 niveles de creciente dificultad. En la nueva modalidad Diseño, hay que crear una figura utilizando las siete piezas del tangram.

Para más información e inscripciones visitar la web del programa: <http://conexionmatematica.catedu.es>.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), M.ª Ángeles Esteban Polo (CEIP Josefa Amar y Borbón, Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Web: <http://sapm.es>

Enero de 2020
ISSN: 2386-8821e