Entorno Abierto

Boletín digital
de la Sociedad Aragonesa
«Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores
de Matemáticas

Número 52
Julio de 2023

Nos despedimos del intenso curso 22-23 con este número de nuestra revista trimestral, recordando todas las actividades realizadas por la SAPM, que son muchas. Hemos de mencionar el estupendo ambiente que se ha respirado en el Grupo de Trabajo *Uso de fuentes históricas en el aula de Matemáticas,* coordinado por uno de nuestros compañeros en el Centro de Profesorado Juan de Lanuza, que gira en torno al empleo de este recurso en nuestras aulas. En este curso asistimos a interesantes encuentros, como el Seminario *Situaciones de Aprendizaje en el aula de Matemáticas* en Logroño del 3 al 5 de febrero, y las *I Jornadas sobre materiales para matemáticas en Educación Secundaria* del 19 al 21 de mayo en Gijón. Por supuesto, las finales de las olimpiadas nacionales fueron protagonistas del final del curso escolar, en sus categorías Alevín, Junior y Juvenil, en el mes de junio, donde hemos tenido una magnífica representación y dos ganadores, con un clasificado para la Olimpiada Internacional Alevín.

Por el camino hemos organizado la V Jornada de Educación Matemática en Aragón, que supuso la vuelta a la normalidad de nuestras jornadas. También, el IV Concurso de Microrrelatos Matemáticos, dentro del programa Conexión Matemática, cuyos premios se entregaron en Aragón Radio en el mes de mayo. Los ganadores así como la presidenta de la Sociedad, participaron en el programa *La buena vida*. Otra gran fiesta de las matemáticas es la *Semana de Matemáticas en la calle,* que lleva una preparación intensa y mucha ilusión detrás. Se celebró en localidades de toda la Comunidad Autónoma y culminó el 13 de mayo en Teruel, junto con el concurso previo del cartel anunciador del IES Pilar Lorengar.

Otro de los concursos que se han vuelto a organizar es el Torneo anual de Tangram. Tuvo dos fases, una *online* y una final, presencial, que se celebró en la Facultad de Ciencias el 12 de mayo. Además, durante todo el curso los compañeros que llevan el programa Conexión Matemática han estado trabajando para que los centros educativos pudieran disfrutar de las diversas actividades, así como el grupo que organiza las Olimpiadas Matemáticas de Primaria, 2.º y 4.º de ESO han elaborado las diferentes fases —preparatorias, semifinal y final— hasta llegar a las nacionales.

No termina aquí nuestro trabajo pues ya estamos inmersos en la preparación de algunas de las actividades del curso próximo y encarando con suma alegría la participación en la Olimpiada Alevín Internacional. Si te apetece involucrarte en estas y/o en nuestra Sociedad, escribe a la junta.

Esther García Giménez
Presidenta de la SAPM

Σrio Interactivo

Haciendo balance. Conexión Matemática 22-23
Matemáticas en la calle en Aragón
VIII Torneo de Tangram
Crónica de la Olimpiada Matemática Junior 2023
III Olimpiada Matemática Aragonesa Alevín
II Olimpiada Matemática Aragonesa de 4.º de ESO
Mi experiencia en las aulas con la enseñanza a través de la resolución de problemas y la evaluación formativa
Una experiencia de Escape Room matemático para alumnado de Primaria acompañada por futuros maestros y maestras
IFRN ZYNM QWXM ONIB IKNM AOHK WSZZ JT 1 (Aritmética modulary criptografía… en 4.º ESO)
Geometría práctica

únete
a la SAPM
click

Haciendo balance. Conexión Matemática 22-23

por

Maite Aranés Maza, Alejandro Beltrán Gracia y Arancha López Lacasta

(IES Villanueva de Gállego; CEIP Pilar Bayona, Cuarte de Huerva; CPI El Espartidero, Zaragoza))

Hola a todos. Durante un curso más se ha desarrollado el programa Conexión Matemática. Este año se ha podido volver a la normalidad en la mayoría de los aspectos que consideramos básicos del programa, recuperando la oferta de talleres (e incluso añadiendo alguno nuevo) y pudiendo adjudicar dos talleres presenciales a cada centro educativo, en lugar de uno.

Durante este curso también volvimos a disponer de las horas de coordinación previas a los recortes de estos años atrás, ampliando así el número de centros participantes (60 centros en Modalidad 1 y 30 en Modalidad 2). Sin embargo, seguimos siendo tres coordinadores en lugar de cuatro, lo que ha conllevado que «nuestro otro trabajo», el de docentes, se haya visto afectado, en ocasiones, por la falta de horas lectivas con nuestro alumnado.

Modalidad 1- Maleta viajera

Es el tercer curso que se oferta esta modalidad y continuamos ampliando el número de centros inscritos. Durante este año, hemos repartido el trabajo en 4 grupos: 2 de primaria y 2 de secundaria, comenzando «nuestro viaje» en enero y terminando a finales de abril. Nuestra maleta cada vez es más grande y llena de recursos y actividades que han sido testados, mejorados y ampliados por numerosos profesores y profesoras.

Además, durante este curso se ha eliminado la relación de las actividades con bloques de contenidos del currículo porque, en primer lugar, estamos en un momento de cambio curricular con los niveles educativos pares con una ley de referencia y los impares con otra, y en segundo lugar porque pretendemos crear un índice más global y que no dependa de cambios desgraciadamente frecuentes.

El trabajo realizado por todos los centros de Modalidad 1 desde el inicio hasta la fecha, se encuentra disponible en nuestra web. En la página principal de la sección «Maleta viajera» encontraréis varios enlaces: los primeros corresponden al listado general y actividades, y los siguientes a los listados y actividades realizadas durante cada curso académico.

Los listados están organizados en una hoja de cálculo, en la cual se incluye una pequeña explicación sobre la actividad, referencia al centro que la propone y a los materiales aportados. Una vez localizada la actividad que queréis trabajar, es cuestión de ir a la carpeta del centro y del curso indicado y descargar los materiales.

Modalidad 2- Semana matemática

Como se ha comentado al inicio del artículo, durante este curso se ha recuperado la oferta de dos talleres presenciales en cada centro educativo. Para participar en esta modalidad cada centro debe presentar un proyecto, puesto que solo podíamos dar cobertura a 30 centros de todo Aragón.

Desde el programa se ofrece a los centros una exposición, con materiales manipulativos asociados y actividades fácilmente adaptables a los diferentes niveles educativos, y dos talleres presenciales. Cabe destacar la implicación de los ponentes del programa, profesores que se ofrecen desinteresadamente a compartir sus experiencias de aula con otros centros y, para desplazarse a otros centros e impartir estos talleres, dejan sus clases (con el trabajo extra de preparar trabajo en su centro para el que sustituya) e incluso cuadran horarios con su centro para no repercutir en el mismo y salir a hacer el taller fuera de su horario de trabajo. Gracias a todos y todas por vuestra dedicación, siempre hemos dicho que los talleres presenciales son parte fundamental del programa y sin vuestra ayuda no sería posible.

Figura 1. Taller (Scape Room) CEIP Luis García Sainz (Fuentes de Ebro)

Figura 2. Expo en CPEPA Marco Valerio Marcial (Calatayud)

IV Concurso de microrrelatos matemáticos

Tal y como se anunció el curso anterior, pretendemos alternar concursos de radionovelas matemáticas con microrrelatos matemáticos. Así pues, durante este curso se ha convocado el IV concurso de Microrrelatos Matemáticos, una iniciativa de la SAPM en ediciones anteriores, y que este curso se ha convocado desde el programa Conexión Matemática en estrecha colaboración con la SAPM. Al final se aceptaron 341 microrrelatos y 9 relatos cortos a concurso, de unos 40 centros distintos.

Los ganadores fueron:

Primaria: Zoilo Cobarrubias Casas. Zaragoza SchoolHouse. *La carrera.*
Secundaria: Jimena Hernández de la Torre Martínez. Colegio San Gabriel. *Tantas cuentas*.
Bachillerato: Marcos Muñoz Sancho. IES José Manuel Blecua. *Relato paralelo*.
General: Raúl Garcés Redondo. *Codicia*.
Relato: Inés Monge Cortés. *Nuestra escala de números negativos*.

También hay que extender la enhorabuena a todos los finalistas:

Ariane Martínez Serrano. Zaragoza SchoolHouse. *Libertad para los ceros.*
Nuria García Aranda. CPI Rosales del Canal. *Cero patatero.*
Alberto Miana. CPI Espartidero. *Castañuelas.*
Mariví Gracia Martínez. Colegio San Gabriel de Zuera. *Cada persona es una ecuación.*
Javier Azón. La Salle Gran Vía. *La calculadora.*
Marcos Carrizo Pérez. IES El Portillo. *«Ad populum».*
Raquel Villacampa Gutiérrez. *La carrera definitiva*.
Sara Lapuente Martínez. *Los números de la vida*.
Marcos Carrizo Pérez. *El dilema de Clark Vauss*.
Nuria Asín García. *Un cero a la izquierda*.

La entrega de premios tuvo lugar en el auditorio de Aragón Radio el miércoles 10 de mayo.

Figura 3. Entrega de premios del IV Concurso de microrrelatos matemáticos

Los microrrelatos ganadores

La carrera
Zoilo Cobarrubias Casas (Zaragoza SchoolHous)

El dieciséis siempre se chuleaba de su 4×4, pero un día el nueve le retó a una carrera con su 3×3, que perdió una rueda nada más empezar. Ahora era un 3×2 y el nueve un seis. Después vino el uno en un uniciclo, el dieciséis iba a tanta velocidad que se dividió entre ocho y era un dos. El uno sonrió pero iba muy despacio y quería más potencia y gritó: «¡uno al cubo!» «¡uno a la miiiiiiil!» pero no avanzaba. Entonces, pidió que los ceros vinieran y ganó.

Tantas cuentas

Jimena Hernández de la Torre Martínez (Colegio San Gabriel)

Me di cuenta de que por más que lo intentara, nuestros problemas no tenían solución. Aunque estuviéramos cara a cara, no encontrábamos la intersección.

No servían los te quieros infinitos, interrumpidos por nuestros gritos. No aportabas nada positivo a ninguno de mis logaritmos.

Éramos líneas discontinuas, queriendo demostrar que eso daba igual. No era una suma continua, rompiendo así tus promesas de un amor integral.

Nuestras peleas irracionales cada vez se volvieron más reales. Tus golpes fraccionales se convirtieron en palabras letales.

Me di cuenta de que por más que piense todo esto, yo te sigo echando de menos.

Relato paralelo

Marcos Muñoz Sancho (IES José Manuel Blecua)

Cuando mi abuelo declaró que las matemáticas eran omnipresentes, mis labios se curvaron en una leve sonrisa. ¿Cuál era la probabilidad de que sus palabras no fueran resultado de su habitual delirio? Las matemáticas solo eran una asignatura más para lograr la media requerida en la escuela. Apenas dormí aquella noche. Mis pensamientos se dividían pensando que, tal vez, mi ángulo de visión era demasiado recto y carecía de agudeza, que mi perspectiva era una mera fracción de realidad. Amanecí agotado, pero convencido de que eran reflexiones proporcionales a mi estrés. Todo había sido producto de mi imaginación.

Codicia

Raúl Garcés Redondo

Mandó cribar los ríos y abrir el vientre de las montañas. Dio orden de buscarlo en antiguos templos y lugares sagrados. Pero no halló ese número áureo o número de Dios que mencionaban los antiguos.

Viendo cómo su anhelo de oro se esfumaba, llamó a los sabios del reino. Fue un matemático quien le habló del número phi y de la sucesión de Fibonacci. Le explicó que la proporción áurea se halla en todas partes: en la espiral del caracol, en un árbol, en el propio cuerpo humano. Y el rey, contrariado, ordenó cortarle la cabeza.

Nuestra escala de números negativos

Inés Monge Cortés

Un kilómetro. Miro las calles transitadas de la ciudad a través de la ventanilla en el asiento trasero del taxi.

Dos manzanas. Observo a la gente pasear por la calle, tranquilos, felices y juntos, sobretodo juntos.

Me fijo en específico en un matrimonio con una hija pequeña. Van los tres agarrados de la mano y sonríen, yo también sonrío. María y yo siempre quisimos un hijo, supongo que las semanas se van sumando hasta que el tiempo pasa y ya no es el momento de restar la edad y fingir que tienes treinta años.

Tres minutos son los que quedan para llegar al asilo, ese edificio frío de paredes blancas del que ningún anciano quiere oír hablar a sus hijos. Y en el que se encuentra, según el recuerdo de este último año, el amor de mi vida, aunque ella no me recuerde a mí.

Cuatro metros son los que hay desde el punto de la carretera donde me ha dejado el taxi hasta la puerta de entrada. No estoy seguro de avanzar. ¿Recordará mi nombre? La última vez, tras algo de esfuerzo y un par de preguntas logró encontrarlo entre las ecuaciones de su memoria, pero era la primera vez en meses.

Después de respirar hondo un par de fracciones de minuto, consigo mover el pie para dar el primer paso, trás eso no me detengo por miedo a darme la vuelta y marcharme. Saludo a la joven recepcionista, ya acostumbrada a verme por aquí casi cada día.

Cinco son los pisos que tengo que subir hasta llegar a ella. Subo al ascensor y observo esa escala de números, cada cual mayor al anterior, y más pesado en mi interior hasta que me detengo en el número de la planta de residentes. Acerco lentamente mi mano temblorosa y algo rígida debido a la artritis hasta que consigo presionar el botón y aparece esa circunferencia roja indicando el número seleccionado.

Ya está, me dirijo en línea recta hacia la realidad, y hacia ella, aunque sienta que ahora mismo nuestras vidas van en líneas paralelas. Y así lo siento desde que nos dieron la noticia.

Seis meses han pasado desde que empezó a olvidarse de donde dejaba sus agujas preferidas de tejer y a no recordar sus quedadas para merendar con sus amigas los miércoles. Y eso que era uno de sus momentos preferidos de la semana.

Pero fue el día en el que no recordó nuestro 52 aniversario cuando me di cuenta de que algo iba mal. No entendía por qué le había comprado sus flores favoritas y en estos 52 años no le habían faltado en ningún aniversario. Tras unos minutos que se me hicieron eternos, ella con cara de confusión y yo con el rostro bañado en una mezcla de pánico y preocupación, aceptó las rosas con una sonrisa de agradecimiento atribuyéndolo a un despiste tonto, pero yo ya me esperaba lo peor.

Y acerté, vaya si acerté. Se me cayó el alma a los pies y sentí una tonelada de peso sobre mis hombros segundos después de escuchar las palabras pronunciadas por el doctor. Alzheimer.

Una palabra, tres sílabas, nueve letras, pero cuántas cifras de recuerdos se lleva consigo, cuántas decenas de momentos roba para no devolver y dejar todo arrasado a su paso. Porque arrasó con ella, y con ella arrasó mi mundo.

Tras ese día mi vida dio un giro de 180º. Los días cada vez se hacían más complicados y las visitas al doctor más frecuentes. Las enfermeras no paraban de repetir que allí estaría mejor atendida y que así podría dormir bien por las noches, que podría ir a verla cuando quisiera y que estarían muy pendientes de ella. Pero yo me negaba. Me aferraba a la idea de una posible mejora cuando en el fondo, muy en el fondo, sabía que era imposible. Aunque esa autoconvicción duró una semana.

Siete días fueron los que pasaron hasta que esa realidad me explotó en la cara, la mañana de lunes en la que me miró a los ojos con una expresión de genuina confusión y me preguntó ¿Quién eres? Ese mismo día le hice una maleta con sus vestidos y blusas más coloridos. También añadí unos cuantos libros y algunas de nuestras fotos. Si iba a olvidar nuestro mundo intentaría que no me olvidase del todo a mí.

Aunque tal vez el que está olvidándose a sí mismo soy yo. Ya no recuerdo cómo era mi rutina antes de este monótono bucle con forma de octógono que se repite cada día. Una rutina de ocho partes.

Ocho puntos que consisten en, levantarme, observar la foto del día de nuestra boda que se encuentra en la mesilla, asearme, vestirme con camisas de sus colores favoritos, preparar el desayuno, poner la mesa como lo hacía ella, comer algo, y por último ir a verla. Y eso es lo que me encuentro a punto de hacer.

Nueve pasos son los que quedan hasta llegar a la puerta de su habitación, pero hoy los siento más pesados que otras veces. Sé que con estas cosas hay que pensar en positivo, pero cada semana que pasa sin mejoras me cuesta más. Es como avanzar en una escala de números negativos en la que cada paso que das te aleja más del número uno, o siquiera del cero. Pero no soy capaz de no venir a verla. No cuando me pongo a pensar qué sería de mi vida sin ella. Sin todos los buenos momentos que hemos pasado y todas las malas rachas que hemos superado juntos. Por eso espero que esta la superemos también o al menos que sepamos vivir con ella el mayor tiempo posible. Así que respiro hondo y me armo de valor mientras avanzo hacia la puerta. En cuanto llego, levanto la cabeza y observo el número de la habitación.

Diez. Habitación número diez. Un número formado por ese uno y ese cero del que os he hablado, y al que espero llegar con ella de la mano algún día. Así que pongo la mejor de mis sonrisas mientras giro el pomo con lentitud tras llamar a la puerta suavemente.

Y la veo. Tumbada en la cama con su pelo corto y rubio algo despeinado y una rosa cogida del jarrón que dejé en su mesilla hace un par de días. Observo sus ojos verdes y esa sonrisa que hace que me levante cada mañana. Está tan guapa como siempre.

Entro a la habitación y cierro la puerta detrás de mí. Tras oír eso ella levanta la cabeza y su sonrisa aumenta al verme. Y con ese simple gesto ya descubro que hoy será un buen día. Porque justo después de que yo le devuelva

una de mis más sinceras sonrisas pronuncia la frase que hace que mi corazón se detenga por un segundo y casi al instante empiece a bombear a toda velocidad. «Hola, Paco, cariño. Has venido a verme».

Hoy ha vuelto a recordarme. Me lo tomo como un paso hacia atrás. Un paso hacia atrás en nuestra escala negativa y por lo tanto un paso más cerca de ese 1, o al menos del 0. Puede que sea un paso pequeño, pero es un paso. Y eso hace que los míos avancen rápidamente hacía ella para coger su mano y darle un beso en la mejilla. La miro a los ojos. En ese verde grisáceo veo el amor y el cariño con el que lleva mirándome desde el día que nos dijimos te quiero. Y en ese momento. Justo en ese preciso instante. Me siento el hombre más feliz del mundo.

Colofón

Curso completado y disfrutado. Para el próximo, no sabemos lo que supondrá el cambio de gobierno en Aragón. De momento podemos indicar que el gobierno saliente por una parte ha publicado la convocatoria del programa, y por otra nos ha cesado como coordinadores del programa. Así que quedamos con completa incertidumbre hacia el futuro del programa, y nos vamos con mal sabor después de este inesperado final.

Os dejamos el enlace a la convocatoria de programas, solo nos queda animaros a que participéis.

Matemáticas en la calle en Aragón

Durante este curso que acaba, desde la SAPM hemos impulsado el cuarto día de matemáticas en la calle y la segunda semana de las matemáticas en la calle en Aragón. Ambas iniciativas se concatenaron desde el 8 hasta el 13 de mayo, es decir, como es habitual, en torno al 12 de mayo que es el Día Escolar de las Matemáticas. De lunes a viernes varios centros de las tres provincias aragonesas salieron a la calle para «hacer» matemáticas con los viandantes; como colofón, el sábado, en Teruel, se *tomó* la Glorieta con otra serie de actividades, divulgativas, educativas, lúdicas…

Tuvimos dos excelentes carteles. El de la semana lo diseñaron el el ciclo de Artes Gráficas del IES Pilar Lorengar (elegimos el de la alumna Yolanda Bolea) y el del día nuestra compañera María Amo.

A continuación, presentamos un resumen de las actividades realizadas.

Semana de las matemáticas en la calle en Aragón

Matemáticas en la calle en Huesca

La celebración en Huesca de la «Semana Aragonesa de Matemáticas en la Calle» fue realizada conjuntamente por el Colegio San Viator, el CEIP El Parque y el Museo de Matemáticas de Aragón.

En el centro de la ciudad, en la Plaza de Navarra, dispusimos 4 grupos de actividades asistidos (en la primera parte) por las profesoras, maestras y las monitoras del Museo.

Un grupo debía medir, con la simple ayuda de un espejo y el teorema de Tales, la altura del cercano edificio de Hacienda.

Otro estaba entrelazado con cuerdas con el objetivo de desenlazarse. O colocando cuidadosamente monedas de 1 céntimo para construir un gran fractal de Sierpinski.

Un tercero estaba en una de las mesas habilitadas haciendo puzzles, construyendo una cúpula de Leonardo o jugando a resolver un Rascacielos.

El cuarto, en la última mesa, resolvía una torre de Hanoi, un puzzle del teorema de Pitágoras o elaboraba, pintando y recortando, una efectista espiral poligonal de origami.

Los/as alumnos/as de 4.º ESO de San Viator comenzaron a las 10h y después de realizar (y aprender) los distintos retos, llegaron a las 12h los de 4.º de Primaria de El Parque. Y entonces comenzó algo fantástico, pues habíamos planeado que los propios alumnos/as de San Viator fueran los encargados de enseñar y/o ayudar a los pequeños en las distintas actividades. ¡Daba gusto verlos!

Agradecemos a la SAPM esta fantástica iniciativa y ¡hasta el año que viene!

IES Corona de Aragón, Zaragoza

Por primera vez este año el IES Corona de Aragón ha participado en la actividad «Matemáticas en la calle».

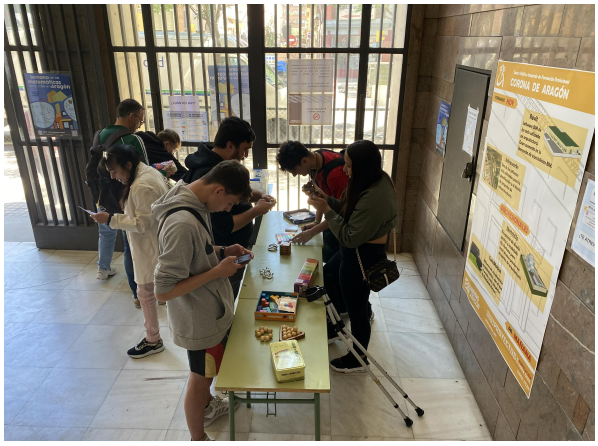
El miércoles 10 de mayo abrimos nuestras puertas de 11h. a 14h.

La actividad se llevó a cabo en la entrada del IES. El profesorado participante salió a la calle invitando a los transeúntes a unirse a las diferentes actividades.

Unas 200 personas pasaron por las diferentes mesas dispuestas.

Las actividades ofertadas fueron:

— *Sabiduría de las masas*: hicimos una réplica del experimento de «El buey de Galton» para el que usamos un paquete de kilo de garbanzos y uno de medio kilo de lentejas. En una urna iban depositando sus predicciones sobre cuántos garbanzos y cuántas lentejas hay en cada paquete. Después realizamos los cálculos de medias y desviaciones.
— *Dale al coco*: ofrecimos diferentes rompecabezas geométricos y las nociones para resolverlos
— *El juego del Nim*: a través de una variación sencilla del juego de Nim los participantes debían encontrar la estrategia ganadora.
— *Tangram*: los participantes se pudieron enfrentar a diferentes paradojas del juego del tangram.
— ¿Cuánto mides?: con explicaciones sencillas los participantes pudieron calcular su altura en números binarios.



Fue una mañana muy divertida y los transeúntes que se nos unieron salieron con ganas de más.

IES Pirineos, Jaca

El IES Pirineos de Jaca se sumó un año más a la iniciativa Matemáticas en la Calle saliendo el viernes 12 de mayo, Día Escolar de las Matemáticas, con más de un centenar de estudiantes a la Plaza San Pedro e inmediaciones de la Catedral para invitar a los jacetanos a su particular «Feria Matemática». Matemagia y juegos de adivinación que tienen su explicación en el álgebra y en distintas propiedades numéricas, juegos de azar en los que se tienen más posibilidades de ganar si se sabe probabilidad (ruletas, carreras de coches y caballos, juegos con dados, dominós y monedas, Monty Hall…) , juegos de estrategia ganadora, de ingenio basados en propiedades geométricas y topológicas, de lógica e ilusiones ópticas fueron algunas de las propuestas escogidas para que el público en general pudiera disfrutar de las Matemáticas en su vertiente más divertida durante esta festiva mañana de viernes. Más información en el enlace:

https://sites.google.com/iespirineos.es/departamento-de-matemticas/matem%C3%A1ticas-en-la-calle/20222023-matem%C3%A1ticas-en-la-calle?authuser=0

IES Río Gállego, Zaragoza

«Las matemáticas tienen truco» dicen algunos, pero en realidad es al revés: «los trucos tienen matemáticas». En el IES Río Gállego lo pusimos en práctica mientras celebrábamos el día de Matemáticas en la calle en el parque Ríos de Aragón. Allí tuvimos una visita sorpresa, Alejandro Hernández Nebra «El Gran Alexander» dejó con la boca abierta al alumnado de primero de la ESO. De su maleta salían cartas, pañuelos, aros, un cubo de Rubik y hasta una calculadora gigante. Al finalizar, nos llevamos un gran regalo, nos enseñó un truco con muchas mates.

IES Salvador Victoria, Monreal del Campo

Nos sumamos otro año a la iniciativa propuesta por la SAPM de sacar las matemáticas a la calle un día de la semana del 8 al 13 de mayo. Aprovechamos la fresca mañana del jueves 11 para llevar una mesa con variados materiales a la calle Mayor, cerca de la plaza de España.

Todas las personas que se acercaron participaron de las distintas propuestas que los alumnos de todos los cursos de la ESO les fueron proponiendo: desde adivinar números a través de unas tarjetas o de una carta elegida entre las de una baraja, escuchar y participar de una historia de encuentros y desencuentros sobre la banda de Moebius, adivinar quién está de más en una serie de objetos utilizando criterios matemáticos, predecir la suma de números elegidos al azar sobre un calendario, desafiar a la mente con juegos de ingenio…

La afluencia, aunque no muy numerosa, consiguió atraer a personas de todas las edades (algunos de ellos, turistas) que pasaron un rato de su mañana disfrutando con las matemáticas gracias a las indicaciones de los alumnos.

IES Santa Emerenciana, Teruel

El día 12 de mayo se conmemora el Día Escolar de las Matemáticas. Por ello, desde la Sociedad de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo» se nos propone, un año más, el reto de sacar las matemáticas a la calle en la semana previa a dicho día. Desde el IES Santa Emerenciana hemos planteado diferentes actividades junto con el CEIP Ensanche y el CEIP Miguel Vallés.

El lunes 8 de mayo el alumnado de 4.º de ESO del IES Santa Emerenciana preparó varias actividades para formar una yincana matemática que tenía que realizar el alumnado de 3.º de Primaria del CEIP Ensanche: buscar formas geométricas, medir campos de petanca, hacer cálculo mental o trabajar con pentominós o tangram fueron las actividades que llevaron a cabo.

El jueves 11 de mayo les tocó el turno a los chicos y chicas de 3.ºESO A y 3.ºESO B junto con el alumnado de 1.º de Primaria del CEIP Miguel Vallés. Los «mayores», antes de ese día, diseñaron cuentos matemáticos para ilustrar e ilustraciones para «ponerles historias matemáticas», pensaron actividades para realizar con los policubos y vieron diferentes maneras de jugar con el tangram. Y ya en el parque de los Botánicos fueron «profesores y profesoras por un día». Las actividades gustaron a los pequeños, aprendieron cosas nuevas y afianzaron otras que ya sabían y, sobre todo, disfrutaron con las matemáticas. Además personas que pasaban por el parque preguntaban que estábamos haciendo y cuando se lo contábamos (bien el profesorado, bien los alumnos) comentaban que les parecía una gran idea y se interesaban por las actividades que estábamos realizando.

Grandes y pequeños se divirtieron con estas jornadas, sintiendo los mayores qué es enseñar matemáticas y los pequeños disfrutando con ellas.

Maestros y profesores quedamos satisfechos y valoramos que actividades como estas debían estar programadas desde el principio de curso y todos los años para fomentar y valorar el gusto por la matemática, para introducir situaciones de aprendizaje en el entorno, y para fomentar el trabajo en equipo de grandes y pequeños.

IES Tiempos Modernos, Zaragoza

Este año en el IES Tiempos Modernos hemos querido poner nuestro granito de arena de nuevo en la celebración de la «Semana Aragonesa de Matemáticas en la Calle». Es por esto que el pasado lunes 8 de mayo, desde las 10:00 de la mañana hasta las 13:00 del mediodía, nos fuimos a una placita que tenemos muy cerca del instituto con algunos/as de nuestros/as alumnos/as de 1.º, 2.º, 3.º y 4.º de la ESO, y estuvimos realizando diferentes actividades con el alumnado de 5.º y 6.º de los colegios cercanos, Hermanos Marx y Josefa Amar y Borbón, y con algunos/as transeúntes que pasaban por ahí y que se animaron a acercarse a ver qué estábamos haciendo.

Las actividades que realizamos fueron las siguientes:

— *Juegos de mesa*: repartimos diferentes juegos («sushi go», baraja del «uno», «patatas» etc.) no solo para aprender a jugar, sino para pensar en estrategias que nos pueden hacer ganar siempre.
— *Solitario de Ada Byron*: repartimos varios de estos solitarios, para ver si alguien era capaz de quedarse con una sola ficha al final (o sea, si alguien era capaz de ganar este solitario). Al igual que con los juegos anteriores, no solo se trataba de aprender a jugar, sino de buscar estrategias que nos permitan saber cómo ganar siempre, saber si hay varias formas de ganar, etc.
— *Acertijos:* imprimimos varios acertijos (de lógica, aritmética, álgebra…) que nuestros/as visitantes se repartían e intentaban resolver con bastante interés.
— *¿Cuántas canicas caben ahí?*: pusimos en un bote un gran número de canicas y les pedíamos a los chicos/as que intentaran estimar cuántas eran. Para ello, les dejábamos usar papel, lápiz, cinta métrica, báscula…
— *Grafos:* plastificamos varios grafos y hacíamos la pregunta «¿se pueden realizar estos dibujos de un solo trazo?». Aquí aprovechamos para explicar en un mural las definiciones básicas de la teoría de grafos y algunas de sus aplicaciones (líneas de metro, relaciones biológicas, etc.)
— *Detalles-recuerdo:* repartimos marcapáginas con textos e imágenes de Maryam Mirzakhani y Pedro Puig Adam, cuya fecha de nacimiento (12 de mayo, en torno a la cual celebramos esta semana de matemáticas en la calle) sirve para conmemorar el «día internacional de la mujer matemática» y el «día escolar de las matemáticas».

Lo pasamos muy bien en esta jornada y si es posible el curso que viene repetiremos la experiencia. Queremos agradecer a la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo» (SAPM) el haber propuesto esta iniciativa con la que tanto alumnado como profesorado hemos disfrutado mucho.

Facultad de Ciencias Sociales y Humanas y CEIP Las Anejas, Teruel

Con motivo de la celebración de la Semana de las Matemáticas en la Calle, el CEIP Las Anejas y la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas de la Universidad de Zaragoza (Campus de Teruel) realizaron el pasado 9 de mayo una actividad conjunta de cuentacuentos matemáticos.

Entre las diez y las doce de la mañana, todo el alumnado de Educación Infantil del mencionado centro, unos 160 niños y niñas de 3, 4 y 5 años, acompañados por sus profesoras, se desplazaron a los jardines de la Facultad. Allí les esperaban 52 alumnos de la asignatura Didáctica de las Matemáticas del grado de Magisterio Infantil de dicho centro universitario que habían preparado previamente un total de diez cuentos con actividades que trabajan diversos contenidos matemáticos acordes al nivel de Educación Infantil: Habilidades lógicas, conteos, sencillas operaciones, medidas básicas, formas geométricas, orientación en el plano…

Sentados por grupos, los niños participaron activamente en los relatos que planteaban los cuentos, ya que estos incluían actividades matemáticas manipulativas que los niños iban realizando. Al final de cada cuento, los alumnos de Magisterio proponían a los niños un juego ambientado en la misma temática. Cada grupo de niños participó en un total de tres cuentos. La actividad nos regaló una mañana muy aprovechada y exitosa.

CRA Alifara, La Fresneda, La Portellada, Ráfales y Valjunquera

En el CRA ALIFARA participamos en el Programa de Conexión Matemática, organizado por la Sociedad Aragonesa Profesores de Matemáticas desde hace varios años. Este curso 2022-2023 hemos celebrado las *Jornadas de Matemáticas en la Calle*. Ha sido una experiencia muy motivadora y gratificante para toda nuestra comunidad educativa.

Los días 15 y 16 de mayo celebramos las jornadas. Cada localidad salió a la calle para presentar todas las propuestas que vamos trabajando dentro de las aulas y esos días, las pudimos compartir y presentar a toda la comunidad educativa (vecinos del pueblo, familiares, amigos…). Transmitimos la importancia que tienen las matemáticas en nuestro entorno y sociedad ya que estamos rodeados matemáticamente (números, formas geométricas, planos, operaciones…). A la vez valoramos la importancia que tienen para nuestro desarrollo y todos los aspectos cognitivos que se trabajan; atención, memoria, observación, manipulación… Dimos también valor al juego como herramienta para su aprendizaje. A continuación, detallamos algunos de los juegos que utilizamos en dichas sesiones:

— *Juegos de atención y estrategia*: memorys, jenga, tetris, ajedrez, fantasma bliz, camelot.
— *Juegos de construcción*: bloques, cartas.
— *Figuras geométricas*: tangram, mosaicos, busca figuras a tu alrededor.
— *Juegos numéricos*: rummy, dados, formula, 13 + 4…

Valoramos muy positivamente la participación en estas jornadas. El ambiente creado fue un aspecto importante a destacar así como la participación e implicación en cada una de las localidades. *Todos disfrutamos mucho aprendiendo con las matemáticas.*

Se puede ver un resumen fotográfico en https://youtu.be/TTE7VReDWSw .

IES Pilar Lorengar, Zaragoza

El viernes 12 de mayo el IES Pilar Lorengar se sumó a la celebración de la *Semana de las matemáticas en la calle en Aragón,* dando lugar a una jornada matemática fuera de las aulas. Este año, al no contar con el permiso del Ayuntamiento de Zaragoza, el evento tuvo que llevarse a cabo en el patio de nuestro centro, limitando la acción divulgativa para la que dicho evento está pensado. En cualquier caso, desde primera hora de la mañana, los profesores del departamento, junto con las clases de 1.º de Bachillerato de Ciencias Sociales, colocaron unas

mesas con actividades matemáticas recreativas: juegos de estrategia ganadora, pruebas de estimación de cantidades, juegos de topología, problemas con grafos, enigmas geométricos, elaboración de mosaicos, experiencias probabilísticas… Nuestro alumnado participó activamente tanto en la realización de las actividades como en la transmisión de sus experiencias a diferentes estudiantes de otras clases, incluidos sus profesores, que se pasaron por el patio del Lorengar a lo largo de la mañana. Las inclemencias del tiempo, con unas ráfagas de viento muy fuertes que hacían volar los materiales por todas partes, nos obligaron a finalizar las actividades de manera prematura. De todos modos, este hecho no impidió que durante las horas dedicadas a la celebración del evento, disfrutásemos de una jornada de divulgación del conocimiento matemático de forma amena y entretenida.

Día de las matemáticas en la calle en Aragón

La Glorieta es matemática.

Al menos, lo fue durante la mañana del sábado 13 de mayo de 2023. Por cuarta vez extendimos mesas y manteles para llenarlos de propuestas matemáticas, acompañando y acompañados por la Feria del Libro y del Cómic de Teruel.

Ya el viernes por la tarde, gracias a la colaboración con la Fundación Antonio Gargallo, se organizó el taller «Matemáticas interactivas para las primeras etapas» dirigido al alumnado de Magisterio y a todo el profesorado de Educación Infantil y primer ciclo de Educación Primaria. Las propuestas para combinar los materiales manipulativos y los generados con el programa GeoGebra quedaron al alcance de todos los asistentes.

Por otra parte, en el segundo trimestre se lanzó el concurso «Scrapbook matemático», una forma de darle otro aire a los habituales concursos de fotografía matemática. El concurso estaba abierto a todo el mundo, puesto que además de las categorías para el alumnado, se propuso una genérica para quien quisiese participar. La colaboración de Dinópolis nos permitió ofrecer entradas como premios así como descuentos a todos los participantes. Los trabajos presentados fueron muchos, por lo que solo una selección de los mimos se pudo exponer durante la jornada del sábado, junto a las mesas de talleres.

La mañana fue muy animada. Desde las 10:00h hasta las 13:30h pasó numeroso público por nuestras mesas. Sobre todo se trataba de público familiar, niños acompañados de sus padres, que se acercaban a las actividades con curiosidad e interés. Tal vez parte de este interés proviniera del reto planteado con el Pasaporte Matemático. Todos los visitantes que lo deseaban disponían de un pasaporte que se iba sellando conforme iban realizando los distintos talleres.

Entre ellos, disfrutamos de la construcción de cúpulas de Leonardo, estructuras de tejados sin columnas diseñadas por el famoso Leonardo da Vinci. Pudimos hacer diversos rompecabezas, como el Tangram u otros propuestos a partir de la estrella mudéjar. Siguiendo con la vinculación con Teruel, también construimos colectivamente los frisos de una torre mudéjar. Los niños pudieron llevarse pulseras de cuentas con secuencias numéricas especiales y realizadas por ellos, o pudieron participar activamente en los cuentacuentos matemáticos que prepararon alumnas y alumnos del grado de Magisterio. Se construyeron poliedros caracterizados de animales, y participaron en el juego de estrategia de los microrrobots. También tuvieron la posibilidad de intentar adivinar el número de bolas que había en una urna, actividad con la que se quiso comprobar lo que se conoce como sabiduría de la multitud: uno puede equivocarse, pero la media de las estimaciones se acerca mucho al número real.

Por cada una de estas actividades, los participantes recibían un sello en su pasaporte. Y si se completaba un mínimo de sellos, se obtenía como regalo un juego Mikado, proporcionado por la Fundación Térvalis. ¡Se agotaron las existencias!

Un animado baile de las funciones puso el punto final a una jornada que transcurrió con mucha participación en un ambiente festivo, lejos de la imagen aburrida y negativa que a menudo se transmite de las matemáticas. Y este año, por fin… ¡ya tenemos camisetas!

Esperamos poder poner en marcha nuevas ediciones de ambas iniciativas, con más centros participantes y con más profesorado colaborando. A la web de *Matemáticas en la calle,* se puede acceder haciendo clic en la siguiente imagen:

VIII Torneo de Tangram

por
Pedro Latorre García
(CPEPA Gómez Lafuente; Zaragoza)

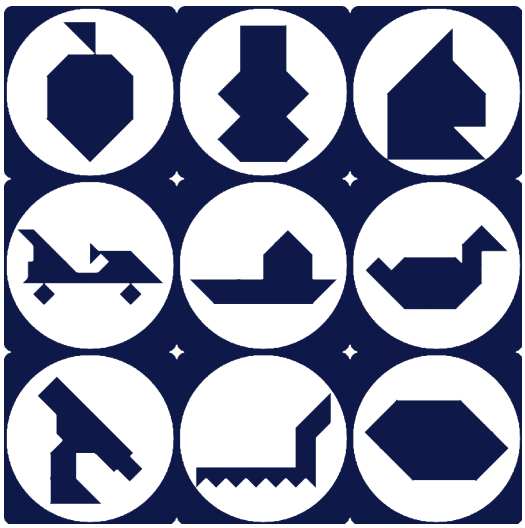
Este curso hemos celebrado a través de la web de la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas el VIII Torneo de Tangram. Está dirigido a los alumnos de Educación Primaria, Secundaria y Formación Profesional Básica de los centros educativos de Aragón. La fase previa está abierta a discentes de Bachillerato y a personas matriculadas en los Centros de Educación de Personas Adultas. Participaron unos 1000 chavales de 32 centros de toda la geografía aragonesa y del Colegio México Bachillerato de Ciudad de México. La fase previa del torneo comenzó el 17 de marzo y concluyó el día 30 de abril de 2023. La fase final tuvo lugar el día 12 de mayo en horario vespertino, y lo más importante es que, después de una larga espera, pudimos celebrarla de forma presencial.

¿En qué consiste el concurso?

El concurso consta de dos fases.

Fase previa. Los participantes juegan al tangram resolviendo las figuras planteadas en la aplicación online que se encuentra alojada en la página web de la SAPM. Los jugadores tratarán de resolver las 50 figuras propuestas con el menor número de ayudas.

Fase final. Los alumnos con las mejores puntuaciones en las categorías Primaria y Secundaria disputan una fase final. Los jugadores tratan de resolver las 9 figuras propuestas con el menor número de ayudas y en el menor tiempo posible. Para hacerlo, disponen de un máximo de 60 minutos. Se celebró en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. Participaron los nueve mejores de cada categoría. La semana anterior los 40 jugadores con más puntos disputaron una fase semifinal *online* con el mismo esquema de la final.

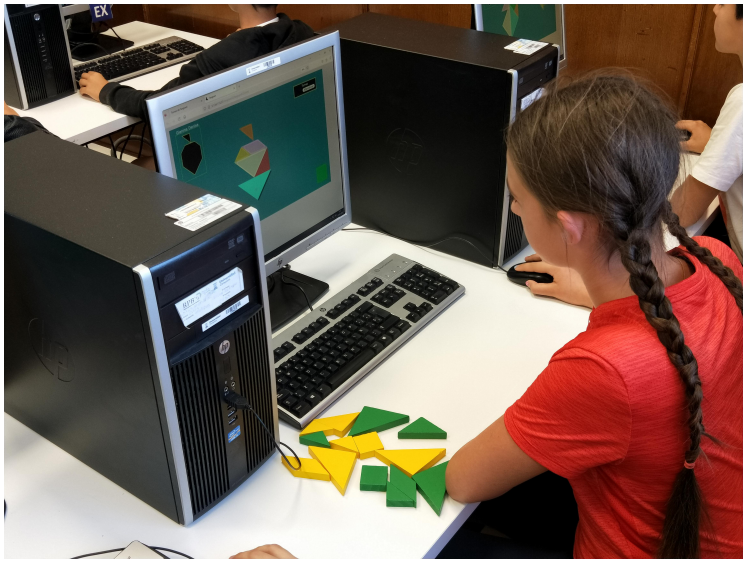


Además de las tradicionales figuras formadas con las siete piezas del tangram, los participantes se enfrentan a rompecabezas hechos con catorce (doble tangram). El grado de dificultad es mucho mayor. En esta edición hubo tres participantes que resolvieron todas las figuras.

Los tres primeros clasificados en la fase final de cada categoría reciben un premio. Para que los alumnos de un centro puedan optar a los premios, tienen que contar con un profesor responsable. Su labor es hacer difusión del concurso, atender las posibles dudas de sus alumnos y, si se da el caso, acreditar la identidad del ganador. Queremos agradecer la desinteresada labor de estos profesores, sin la cual no podríamos realizar este concurso.

Ganadores del Torneo

Categorías de Bachillerato y Adultos. Jesús Villoslada Díaz fue el ganador en Bachillerato. Un año más, la ganadora en Adultos ha sido M.ª Carmen Laga Palau. Ambos resolvieron los 50 puzles.



Fase final de Primaria y Secundaria. Los ganadores *ex aequo* en Primaria fueron Adrián Alconchel Macipe y Miguel Ángel Ramírez Puyuelo, resolviendo ocho de las nueve figuras propuestas. Marcos Pascual Romero ganó en Secundaria, solucionando todos los problemas, sin utilizar ayudas en solo 30 minutos.

La página web del Torneo de Tangram es <http://sapm.es/tangram/>.

Crónica de la Olimpiada Matemática Junior 2023

por
Sergio Martínez-Juste
(Universidad de Zaragoza)

Durante este último curso 2022-2023, en lo que se refiere a la Olimpiada Matemática Junior (o la que comúnmente denominamos «de 2º de la ESO») hemos continuado el camino hacia la recuperación de la «normalidad prepandemia». A pesar de los cambios en las personas encargadas de la organización de esta olimpiada, y la desorganización que ello haya podido provocar, nos acercamos cada vez más a los números de participación previos al 2020.

Como viene siendo costumbre, la olimpiada, para los participantes aragoneses se divide en 3 fases, la fase semifinal autonómica, la final autonómica y la final nacional.

La semifinal autonómica

Para la semifinal autonómica, celebrada el 19 de abril de 2023, contamos con casi 700 participantes que provenían de 105 centros escolares diferentes. Para esta fase, siguiendo la tendencia de los últimos cursos la prueba se realizó entre semana en horario de tarde y se amplió el número de sedes diferentes para facilitar la asistencia del alumnado y la labor del profesorado que se implica en la organización en cada una de las sedes. En total 25 centros escolares y la Facultad de Educación de Zaragoza se ofrecieron para celebrar esta fase semifinal (en la figura 1 podemos ver alumnado realizando los problemas de la fase semifinal en distintas sedes). A pesar de las dificultades logísticas, el balance de la organización ha sido positivo, sin embargo, pensamos que para futuras ediciones el número total de sedes debe revisarse. Sin volver a utilizar una única sede o una sede por provincia como en el pasado, debemos

Figura 1. Algunas de las sedes de la semifinal autonómica. Fuente: organización de la Olimpiada

intentar que en cada sede haya alumnado de más de un centro para acercarnos a esa finalidad de socialización entre profesorado y, sobre todo, alumnado, que tiene esta olimpiada.

Respecto al aspecto más académico, somos conscientes de que algunos compañeros y algunas compañeras han manifestado que la dificultad general de los seis problemas de la semifinal era alta. Revisando los resultados y comparándolos con los de años anteriores se comprueba que las puntuaciones de corte para la final han sido más elevadas que en pasados años. Pese a ello, recogemos el guante de los miembros de la sociedad para intentar que, proponiendo problemas no triviales, ni mecánicos, que representen un reto para el alumnado participante y que trabajen diferentes procesos matemáticos, podamos presentar una colección de tareas más abordable y atractiva para el alumnado. Somos conscientes, y queremos seguir trabajando en ese sentido, que el principal motivo por el que se desarrolla la Olimpiada Matemática Junior es la promoción de una visión atractiva y universal de las matemáticas. Esta fase semifinal debe abrirse a todo el alumnado aragonés y ganar participantes, deseamos que más centros y más alumnos y alumnas participen y para ello es imprescindible no generar una sensación de que los problemas planteados en la semifinal pueden resolverlo solo «mentes privilegiadas» sea lo que sea que eso signifique. La competición debe estar supeditada a la promoción de las matemáticas entre el alumnado.

La final autonómica

La final aragonesa se celebró el 20 de mayo de 2023. Por un lado, las sesiones de problemas y el trabajo de la comisión correctora se realizó en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, como viene siendo habitual. Sin embargo, el adelanto de las convocatorias de exámenes en la universidad provocó que coincidiéramos en el espacio-tiempo con alumnado universitario que se examinaba de Física Cuántica y asuntos similares. Este hecho provocó que la tradicional entrega de premios no se pudiera realizar en el aula magna de la Facultad de Ciencias, desplazándose a otro escenario. En concreto, la entrega se realizó en el salón de actos del Colegio Mayor Pedro Cerbuna. Por tanto, otra de las tareas pendientes para futuras ediciones será adaptar los tiempos de la olimpiada para no tener problemas de espacios o buscar nuevos espacios para conservar la organización temporal tradicional.

Problema 4. *Recipiente rebosante*

Tenemos un recipiente en el cual podemos verter agua, de tal manera que el agua no escapa por ningún sitio a no ser que su nivel desborde el recipiente. La gráfica muestra la relación entre el volumen de agua dentro del recipiente y la altura que alcanza el agua. **Describe cómo es el recipiente y haz un dibujo de este.**

Figura 2. Uno de los problemas de la fase final aragonesa

Tras casi dos horas de trabajo y cinco problemas (figura 2), de los 76 participantes en la final se seleccionaron a los seis ganadores y, de entre ellos, a los tres representantes aragoneses que viajarían a la final nacional: Alberto, Bianca y Guillermo.

La final nacional

La XXXIII Olimpiada Matemática Nacional Junior, tuvo lugar entre el 23 y el 26 de junio en Tenerife. Así que además del honor de representar al alumnado aragonés, Alberto, Bianca y Guillermo tuvieron la suerte de disfrutar de la isla y su clima. Aunque no pisamos las maravillosas playas de la isla sí aprovechamos su clima para visitar la increíble localidad de La Laguna donde se realizó la prueba por equipos y coger un poquito de color paseando alrededor del auditorio de Santa Cruz de Tenerife (ver figura 3) donde se realizó la prueba individual y la entrega de premios.

Figura 3. Participantes de la XXXIII Olimpiada Matemática Nacional Junior, y profesorado acompañante, frente al auditorio de Santa Cruz de Tenerife. Fuente: organización de la Olimpiada

El premio de los participantes siempre es la experiencia de convivencia que supone la final nacional. Pero, además, este año, no podemos dejar de destacar que uno de nuestros finalistas aragoneses se llevó una de las cuatro menciones de honor que se otorgaron a los mejores resolutores de los problemas de la prueba individual. Nuestra más sincera felicitación a Alberto (figura 4).

Figura 4. Alberto Rodrigo, mención de honor en la XXXIII Olimpiada Matemática Nacional Junior. Fuente: organización de la Olimpiada

En el curso 2023-2024 volveremos con más matemáticas y con la mirada puesta en Extremadura, donde se celebrará la XXXIV Olimpiada Matemática Nacional Junior.

III Olimpiada Matemática Aragonesa Alevín

por

Alejandro Beltrán Gracia

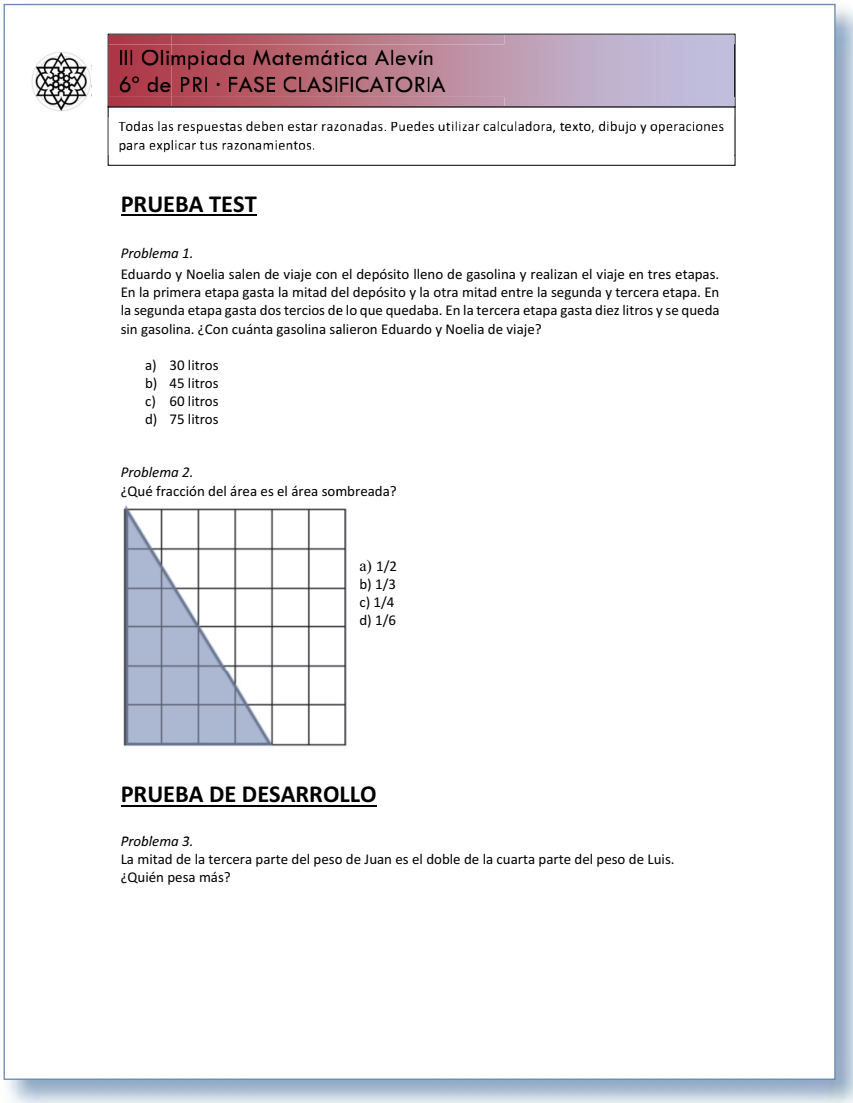
(CEIP Pilar Bayona; Cuarte de Huerva)

Durante el curso 2022-2023, dentro de las olimpiadas convocadas por la Sociedad, se llevó a cabo la tercera edición de la Olimpiada Matemática Alevín en Aragón. Esta modalidad aún está dando sus primeros pasos, poco a poco se va actualizando y reformulando para dar con un formato que se ajuste a lo que desde la organización creemos que debe ser una olimpiada matemática para niños y niñas de 11 y 12 años: una actividad de centro, que promueva el interés por aprender matemáticas entre los escolares de 5.º y 6.º de Primaria.

Es importante destacar «actividad de centro» en la definición de la olimpiada, puesto que el objetivo no es que participe aquel alumnado que demuestra talento en matemáticas, sino que sea una actividad en la que todo el alumnado del colegio que se inscriba pueda participar y sean las distintas fases de clasificación las que hagan que aquellos con mayor competencia, alarguen su participación hasta clasificarse para la olimpiada nacional.

De este modo, la olimpiada alevín sigue constando de tres fases: fase clasificatoria, semifinal y final.

La fase clasificatoria se realiza en cada centro educativo. En la web de la olimpiada se proponen tres problemas a la semana (dos tipo test y uno de desarrollo) con dificultad y tipología variada. El objetivo es que todo el grupo-clase participe en la ejecución de los problemas de esta fase, como si se tratara de una actividad más del área de matemáticas, siendo la evaluación de esta actividad lo que sirva al profesorado para seleccionar a los 5 semifinalistas. Realizar así la clasificación consigue varios efectos positivos: todo el alumnado se siente partícipe de la actividad, se da una pequeña ayuda al profesorado para trabajar la resolución de problemas desde un enfoque más motivador y la retroalimentación aportada por las soluciones colgadas en la web (tanto las que nos manda el alumnado como las de la organización) dan pie a futuros debates matemáticos en clase sobre las posibilidades de resolución de un problema, acercándonos a un enfoque más competencial de esta tarea.



III Olimpiada Matemática Alevín
6º de PRI · FASE CLASIFICATORIA

Todas las respuestas deben estar razonadas. Puedes utilizar calculadora, texto, dibujo y operaciones para explicar tus razonamientos.

PRUEBA TEST

Problema 1.
Eduardo y Noelia salen de viaje con el depósito lleno de gasolina y realizan el viaje en tres etapas. En la primera etapa gasta la mitad del depósito y la otra mitad entre la segunda y tercera etapa. En la segunda etapa gasta dos tercios de lo que quedaba. En la tercera etapa gasta diez litros y se queda sin gasolina. ¿Con cuánta gasolina salieron Eduardo y Noelia de viaje?

a) 30 litros
b) 45 litros
c) 60 litros
d) 75 litros

Problema 2.
¿Qué fracción del área es el área sombreada?

a) 1/2
b) 1/3
c) 1/4
d) 1/6

PRUEBA DE DESARROLLO

Problema 3.
La mitad de la tercera parte del peso de Juan es el doble de la cuarta parte del peso de Luis. ¿Quién pesa más?

Tras realizar esta fase clasificatoria en los centros, los seleccionados realizaron la tarde del miércoles 19 de abril la semifinal de la olimpiada en distintas sedes del territorio aragonés. Como siempre, agradecer a todos los centros que se ofrecieron para ser sede, y en especial al profesorado y equipos directivos de las sedes elegidas por la dedicación desinteresada para que la jornada discurriera de la mejor forma posible. En cuanto a la prueba, para esta edición cambiamos el formato y decidimos dejar de realizar las viente preguntas tipo test de anteriores ediciones y elaborar un pequeño test de diez preguntas y dos problemas de desarrollo, de manera que pudiéramos enriquecer la prueba y abarcar un mayor espectro de la competencia matemática en Educación Primaria. Como viene siendo habitual desde la primera edición, algunos de los problemas de esta prueba sirvieron para promover la cultura matemática y dar a conocer problemas y personajes matemáticos clásicos como los puentes de Könisberg y Euler o lo especial que era el número 1 729 para Srinivasa Ramanujan. Se pueden descargar la prueba en el siguiente enlace.

Así, los 50 clasificados/as acudieron a la fase final celebrada en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza durante la mañana del sábado 20 de mayo. Se realizaron dos pruebas, la primera con cinco preguntas tipo test y la segunda con tres problemas de desarrollo. La primera parte de la prueba se contextualizó en el territorio aragonés, de manera que el alumnado resolvió problemas sobre navegar en barca por el río Ebro, visitar la estación de Canfranc o recorrer algunos de los puntos más conocidos de la ciudad de Teruel. Se puede descargar la prueba en el siguiente enlace.

Figura 1. Alumnado durante la fase final

Por último, y a modo de resumen, destacar que en esta edición han participado 53 centros educativos y se clasificaron para la semifinal 211 niños y niñas que repartimos en 14 sedes (algunas compartidas con la olimpiada de 2.º de ESO). Los finalistas de la presente edición fueron: Arturo Beltrán Viejo, Claudia Royo Acón, Gael Gameiro Visús, Teo Hernández Mayayo y Adrián Tena Pérez. Estos tres últimos participaron en la final de la Olimpiada alevín nacional, celebrada en Gran Canaria. Además, Gael Gameiro Visús se clasificó entre los tres primeros, por lo que participará durante el 8 y 9 de diciembre en la… Olimpiada internacional.

Figura 2. Clasificados para la final nacional

¡Gracias a todos los que hacéis posible esta actividad y enhorabuena al alumnado participante!

II Olimpiada Matemática Aragonesa de 4.º de ESO

por
Daniel Sierra Ruiz
(CPI El Espartidero, Zaragoza)

En este curso que acabamos de cerrar, se ha celebrado la II Olimpiada Matemática Juvenil (3.º y 4.º de ESO) que convoca la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. En esta olimpiada no participan todas las sociedades como ocurre con la de 2.º de ESO, pero la Aragonesa (SAPM) sí. El hecho de que participen pocas sociedades se debe, fundamentalmente, al esfuerzo económico y organizativo (infraestructura, profesorado colaborador, etc.) que supone. La nuestra es una Sociedad relativamente pequeña, por lo que este esfuerzo es, si cabe, mayor. Este es uno de los principales motivos por el que nos inclinamos a realizar la fase semifinal en formato *online*.

Evidentemente, con este formato evitamos tener que buscar espacios (no hay muchos centros que se ofrezcan a ser sede) y profesores colaboradores para la vigilancia de aulas. Por el contrario, nos genera algunos problemas a la hora de enviar y recibir pruebas y soluciones. Además, hubo personas que nos *advirtieron* de que de esta forma los participantes podrían hacer «trampas». Los compañeros que organizan la fase aragonesa de la olimpiada de Bachillerato nos comentaron que piden que se firme una declaración jurada como que la prueba se realiza sin ningún tipo de ayuda. ¿Con esto es suficiente?

Por otra parte, esta forma de participación nos abre la posibilidad de plantear otro tipo de prueba. Y eso supuso una motivación extra para las personas que preparamos la semifinal que fuimos Ricardo Alonso, Maite Aranés, Pedro Latorre, Antonio Oller y el que suscribe. Todos nosotros pensamos que es necesario un cambio en la forma de enseñar matemáticas (mucha gente lo piensa desde hace muchos años), aunque todos tengamos nuestros matices. Así que, quizás, es hora de incluir cambios en el modelo de olimpiada; eso no quiere decir que la prueba que planteamos en la semifinal *sea el modelo correcto*. Simplemente es *nuestra* primera propuesta, claramente mejorable.

La semifinal se celebró el mismo día que las otras dos que organizaba la SAPM (5.º-6.º de Primaria y 1.º-2.º de ESO), es decir, el 19 de abril, y constó de las siguientes pruebas:

— Un problema tradicional, para resolverlo en papel [enunciado].
— Un problema de estadística y probabilidad. Este problema requería entrar en una aplicación *online* que simulaba el lanzamiento de un dado (hasta que saliera el primer 5). Se obtenían datos de 10000 simulaciones que se descargaban en una hoja de cálculo. Con estos datos había que responder una serie de preguntas. Esta prueba se puede ver en el siguiente enlace.
— La tercera prueba consistía en una escena de GeoGebra en la que los participantes debían mover algunos elementos, obtener conclusiones y responder a algunas preguntas. Esta prueba y las dos siguientes se pueden ver en el siguiente enlace: Para esta prueba no era necesario manejar GeoGebra.
— Sin embargo, en la cuarta prueba sí había que saber manejar GeoGebra, pues se trataba de resolver un problema de Geometría usando este programa.
— La última prueba fueron seis cuestiones de tipo test.

Estas cinco pruebas sirvieron para ordenar la lista de participantes en la semifinal y seleccionar a los 26 finalistas. La final se celebró de forma presencial, el mismo día que las otras dos (el 20 de mayo), en la Facultad de Ciencias. Como siempre, hemos de agradecer al decano de la Facultad que podamos celebrar la final allí; en esta ocasión no pudo ser en el aula magna, ya que se encontraba ocupada debido a los cambios en los periodos de exámenes en la universidad. Por ese mismo motivo, la entrega de premios hubo que hacerla en el salón de actos del CMU Pedro Cerbuna.

Decidimos que la final sería una prueba al uso; es decir, una prueba de resolución de problemas (figura 1), ya que aún necesitábamos evaluar cómo había funcionado la semifinal. Los cinco problemas a los que se enfrentaron los finalistas se pueden ver en este enlace.

Figura 1. Los finalistas resolviendo los problemas

Como suele ser habitual en la final, los correctores se aplicaron con eficacia para evaluar las resoluciones con sus respectivas explicaciones. Esto sirvió para seleccionar a los tres representantes aragoneses, que por orden alfabético fueron: Malena Fernández Blanco, Isaac Sesé Serrano y Esther Wang Liu (figura 2).

Figura 2. De izquierda a derecha Malena Fernández Blanco, Isaac Sesé Serrano y Esther Wang Liu

Tanto la olimpiada nacional de segundo de la ESO como la de Primaria, se celebran presencialmente en la comunidad de la sociedad organizadora. El evento se convierte más en una convivencia de tres o cuatro días que en una competición. Cuando la FESPM se planteó lanzar la de 4.º de ESO se encontró con problemas similares a los mencionados al hablar de la semifinal aragonesa. Organizar una olimpiada nacional supone un esfuerzo económico y de personal muy importante. En muchas ocasiones, las administraciones colaboran poco, por lo que a las respectivas sociedades les resulta trabajoso levantar una olimpiada nacional. Por todo esto, la nacional de 4.º de ESO se hace en un formato semi-presencial; es decir, cada sociedad reúne a sus representantes en su propia comunidad y se unen por videoconferencia con la sociedad organizadora, que, en esta ocasión, fue la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán».

Emplazamos a nuestros representantes el sábado 3 de junio a las 10:15 en el CPEPA Gómez Lafuente (figura 3) de Zaragoza. Una vez más debemos agradecer al director y, especialmente, al secretario de este centro de educación para adultos el ofrecimiento y las facilidades para realizar la prueba. Tras los discursos protocolarios a cargo del presidente de la FESPM y de la presidenta de la sociedad organizadora, todos los participantes de las respectivas sociedades empezaron simultáneamente a resolver los cuatro problemas planteados (figura 4). La prueba finalizó a las 13:30 con la preceptiva entrega de diplomas (figura 5). Cada sede escaneó y envió las diferentes resoluciones y se nos citó a la proclamación de ganadores que tendría lugar a la vez que la de 2.º de ESO.

Figura 3. Cartel de la olimpiada nacional en la puerta del CPEPA Gómez Lafuente

Figura 4. Esther, Isaac y Malena muy, muy concentrados en la resolución de los problemas

Así pues, el 25 de junio, desde Canarias, a las seis de la tarde se procedió a la proclamación de los premiados de las olimpiadas de 4.º y 2.º. Los de 4.º lo vieron online, y, la verdad, es que quedó algo deslucido, pues apenas se entendía lo que se decía al otro lado del ordenador. Hubo una actividad de magia matemática de la que apenas nos enteramos. En consecuencia, estuvimos una hora y media a la espera de saber los ganadores de la olimpiada de 4.º. Desafortunadamente no hubo ninguno de Aragón como se puede comprobar en el siguiente vídeo.

A partir de septiembre, la SAPM empezará a analizar si sigue participando en la olimpiada de 4.º de ESO y, en caso afirmativo, el tipo de prueba que planteará. Informaremos oportunamente.

Figura 5. Los tres representantes de Aragón con los diplomas acreditativos de haber participado en la final nacional

Mi experiencia en las aulas con la enseñanza a través de la resolución de problemas y la evaluación formativa

por
Pablo Mateo
(IES El Portillo, Zaragoza)

El nuevo currículo de matemáticas en Aragón hace una apuesta por la enseñanza a través de la resolución de problemas y por la evaluación formativa. Esto supone un profundo cambio en la forma de enseñar matemáticas que está más extendida, hoy en día, en las aulas aragonesas. Un cambio tan importante no se produce de la noche a la mañana, y su mera aparición en el currículo tampoco va a ser un motor de cambios por sí mismo. Así, si queremos que su implantación en las aulas no acabe en papel mojado, es necesario convencer a los y las docentes a través de experiencias como esta.

Conozco a docentes que se han interesado por estas metodologías didácticas, pero han acabado abrumados o no han sabido cómo empezar. Seguro que también hay gente que lo ha probado puntualmente en alguna clase y ha salido desmoralizada. Esto es completamente normal, más aún para aquellos docentes que llevan muchos años trabajando de otra manera. La gestión del aula es distinta, la motivación que empuja al alumnado a trabajar es diferente (no se juega con la calificación como elemento motivador), el proceso de enseñanza también cambia (el docente expone mucho menos), cambia el modo de evaluar, de informar al alumnado sobre su proceso de aprendizaje, etc.

En este artículo comparto mi experiencia usando la enseñanza a través de la resolución de problemas y la evaluación formativa en las aulas del IES El Portillo de Zaragoza. Además, incluyo reflexiones y sugerencias para quienes se están planteando dar el paso o están empezando a darlo ya.

Matemáticas 1.º de ESO en el IES El Portillo

Este curso 22-23, aprovechando la entrada en vigor del nuevo currículo de matemáticas (LOMLOE), hemos cambiado la metodología y el método de evaluación de la asignatura de Matemáticas en 1.º de ESO. Somos tres profesores compartiendo docencia en este nivel y desde el primer momento estuvimos de acuerdo en dar el paso. Seguimos una enseñanza a través de la resolución de problemas, y hacemos una evaluación *enfocada* en la evaluación formativa. De las tres, yo era el único que ya había aplicado en el curso anterior la enseñanza a través de la resolución de problemas, pero ninguna habíamos hecho evaluación formativa antes, y al ser algo que hacíamos todas por primera vez quisimos tener una «red de seguridad» (de ahí lo de enfocada).

Figura 1. Preparando materiales en el departamento del instituto

No seguimos libro de texto. Hacemos nuestros propios materiales didácticos (el trabajo es arduo). Nos basamos principalmente en el currículo: tanto en las orientaciones metodológicas como en las situaciones de aprendizaje y las referencias.

Enseñanza a través de la resolución de problemas significa que el alumnado trabaja desde el principio, sin necesidad de hacer explicaciones previas sobre los contenidos que se van a trabajar. Las actividades están específicamente diseñadas para esto.

2. a) ¿De cuántas formas distintas se pueden disponer 12 puntos en forma de rectángulo? Dibújalas todas.

b) ¿Y 16 puntos?

c) ¿Cuántos más puntos haya habrá siempre más posibles rectángulos?

d) ¿Cuántos rectángulos se pueden hacer con 17 puntos?

e) Encuentra todos los casos de menos de 20 puntos en los que **solo** se pueda formar **un rectángulo**.

f) ¿Notas algo en particular con los números de puntos del apartado anterior?

g) Encuentra todos los casos de menos de 20 puntos en los que uno de los rectángulos sea un **cuadrado**.

h) ¿Notas algo en particular con los números de puntos del apartado anterior?

i) ¿Cuál es el caso de menos de 20 puntos en el que se obtienen el **mayor número de rectángulos** posibles?

Figura 2. Ejemplo de actividad inicial para introducir los números

En clase suelo trabajar en grupos. Voy pasando por los grupos, reviso lo que van haciendo, y les hago preguntas. No suelo decir explícitamente si lo que han hecho está bien o mal, sino que les hago preguntas para que se den cuenta por ellos mismos. Estoy uno o dos minutos con cada grupo (lo ideal sería estar un poco más, pero si estás con grupos que son activos pero dispersos hay que estar siempre un poco más pendiente del resto de la clase). Uso el móvil para hacer fotos de las cosas que voy viendo y que quiero comentar. Después de un rato de trabajo en grupos paramos y hacemos una puesta en común. Proyecto las fotos que he ido haciendo y las vamos analizando. Entonces enuncio explícitamente lo que está bien y lo que está mal o se puede mejorar. Cada vez tiendo a usar menos la pizarra porque tengo la sensación de que cuanto más escribo, más desconectan y menos les sirve. No explico nada «de cero», sino que siempre parto de alguna experiencia previa.

No hacemos exámenes al uso. Hacemos tareas calificables. Se trata de pruebas escritas más cortas que un examen habitual y que hacemos cada poco tiempo. Muchas veces las reviso y les dejo rehacerla al día siguiente (o una tarea parecida, y en este caso pueden tener la primera delante). Para algunas tareas calificables también pueden tener el cuaderno de clase y las fichas delante. La calificación de estas tareas no viene dada por una nota numérica del 0 al 10, sino que son calificadas de acuerdo a cuatro niveles:

— Iniciado: Necesita más tiempo para entender esto o necesita un ejemplo delante para poder hacerlo.
— Adquirido: Hay cosas que no entiende, faltan explicaciones y/o está cometiendo errores de cálculo.
— Notable: Puede hacerlo y explicar cómo lo ha hecho, aunque tiene algún error.
— Excelente: Puede hacerlo, explicar o mostrar cómo lo ha hecho y explicar qué significa la solución o hacer alguna observación adicional.

La idea está sacada de lo que Pablo Beltrán-Pellicer (2020) propone en su blog. Los cuatro niveles de la escala se traducen en cuatro números (1-2-3-4) y la nota de la evaluación viene dada por la media de las tareas con una escala de conversión apropiada.

El método de calificación es muy parecido al estándar (calificación final basada en un número que es la media de una serie de pruebas escritas, que en nuestro caso son las tareas calificables). Todavía no estoy contento con esto, pero es un primer paso. Insisto mucho en que sean conscientes de su propia evolución en el proceso de ense-

ñanza-aprendizaje. Les hago reflexionar brevemente al final de muchas clases sobre lo que han aprendido, posibles dificultades en las que aún deben trabajar, y si han aprovechado la clase. Tras cada tarea calificable les comento en qué deben mejorar y esta (junto con el nivel asociado a cada tarea) es la forma de que tanto ellos como las familias se vayan haciendo una idea de cómo van. Es importante informar y trabajar con las familias en esta nueva forma de evaluar porque está muy extendida la idea de que para saber qué tal le está yendo a su hija o hijo solo hay que mirar las calificaciones que va sacando en los exámenes. Y en nuestro caso, al no haber exámenes, las familias pierden ese referente y deben acostumbrarse, con nuestra ayuda, al nuevo modelo.

¿Y cómo consigues que se «tomen en serio» la asignatura si no hay notas?

Este es uno de los principales retos que afrontamos cuando nos planteamos el paso a una evaluación formativa sin calificaciones numéricas. Y en nuestro caso no ha sido una excepción. Por eso hemos acudido a un método de evaluación híbrido en el que, si bien no usamos el método tradicional de calificaciones numéricas de 0 a 10, seguimos usando notas numéricas de manera más o menos velada.

Por un lado, al alumnado le cuesta mucho menos adaptarse al método si no es la única asignatura en la que se evalúa de esta manera. Esto no depende de nosotros, pero tampoco es un impedimento en caso de ser los únicos que lo hagamos así.

Por otro lado, hay un importante cambio de paradigma que debemos hacer explícito al alumnado y asegurar que lo entienden (o, mejor dicho, van entendiendo) hasta que entren en la dinámica que queremos. El alumnado, y en especial el alumnado acostumbrado a sacar «buenas notas», quiere tener calificaciones. Promover el interés del alumnado en nuestra materia utilizando como rehenes las calificaciones fomenta una motivación extrínseca por trabajar y aprender matemáticas. Uno de los objetivos de la enseñanza a través de la resolución de problemas y de la evaluación formativa es promover una motivación intrínseca por aprender y descubrir las matemáticas (Alsina i Pastells y Domingo, 2007). Este cambio es uno de los más importantes al que debemos aspirar como docentes de matemáticas.

> Sí, Pablo, esto suena muy bien, pero mañana tengo una clase con veintitantos alumnos y conseguir que todos estén motivados sin recurrir a las notas es una quimera. Bueno, honestamente, creo que no.

El alumnado debe ver de manera constante en dónde ponemos el foco nosotros, en qué nos fijamos, etc. Si nosotros dejamos de pensar en las notas (y dejamos de mencionarlas) el alumnado tampoco las tendrá tan presentes. Podemos recurrir al todo cuenta para nota, pero explicándoles en qué consiste para que se hagan una idea concreta, la visualicen y no sea algo vacío lanzado al aire. Una de las formas de explicarlo que uso yo es: «Todo lo que hacéis cada día cuenta para nota. Al final de cada clase yo me apunto en un cuaderno qué tal habéis trabajado. Vais a ir trabajando día a día, haciendo trabajos, fichas, tareas, etc. Yo corregiré algunas tareas, y al final de cada evaluación os diré qué tal vais: si vais bien, si todavía os falta (analizando qué os falta y cómo lo podemos conseguir), etc.». Obviamente, no puedo apuntar comentarios de todo el alumnado después de cada clase, pero sí que uso un «registro anecdótico» en el que apunto notas (cuantitativas o cualitativas) de una o dos personas después de cada clase. Como tengo poco tiempo en los intercambios, y al final de la mañana no lo tengo tan fresco, intento grabar un audio de unos veinte segundos en el móvil al terminar la clase (a veces tampoco consigo hacerlo después de cada clase, pero intento hacerlo a menudo).

Es importante ser constante y, en la medida de lo posible, no dar muestras de flaqueza. Ellos van a intentar volver al método tradicional, y te van a empujar hacia él. El primer curso que empecé con esto les pedí en varias ocasiones que valoraran qué les parecía la metodología y si preferían volver a una enseñanza más rutinaria siguiendo el libro de texto. Tenía todavía ciertas dudas y quería conocer su opinión sincera. En 1.º y 2.º de ESO ambas opciones tuvieron más o menos el mismo apoyo. En 3.º de ESO la balanza se empezaba a inclinar por la metodología tradicional, y en 4.º de ESO esa inclinación se confirmaba. Los más mayores ya se habían acostumbrado a una metodología, se habían hecho a ella y eran, por lo tanto, mucho menos flexibles a la hora de adaptarse a una nueva. Dudo mucho que estos resultados se repitieran de haber trabajado ya así durante varios años. Y, en cualquier caso, esta metodología tiene la fortaleza de ser más inclusiva en su atención a la diversidad, por lo que

tiende a dejar a menos gente atrás (gente que muchas veces no llega a los últimos cursos de la ESO, y por tanto tampoco se ve representada en estas votaciones).

Sugerencias prácticas y didácticas

Ayuda mucho tener en el departamento compañeras o compañeros con los que podáis compartir y comentar qué tal está saliendo. Si no es así, puedes buscar una comunidad de docentes que estén en el mismo punto (grupos de profesores en Telegram, claustro virtual en Twitter, etc.). Busca entornos en los que te sientas cómoda y puedas compartir tu experiencia o leer la de otras personas. En algunas ocasiones es necesario desahogarse, y muchas veces basta con hablar o leer a otros docentes con los que te puedas identificar.

Si no estás muy convencida, haz alguna prueba (en una unidad didáctica, por ejemplo) y trata de identificar cosas que te llamen la atención. Para implantarlo con garantías de manera más profunda es importante que hayas logrado un cierto nivel de confianza (o que colabores o compartas docencia con alguien que sí lo tenga y te pueda ayudar). Si no la tienes todavía, puedes acudir a materiales diversos sobre el tema (libros, secuencias didácticas), así como a cursos de formación, congresos, jornadas de profesorado, etc. Si estás solo en tu departamento sigue el libro o el material que uséis habitualmente y de vez en cuando ve probando actividades que prepares o que hayas visto. Valora siempre tus fuerzas y ten muy en cuenta que la salud es lo primero.

Si no has trabajado nunca por grupos en el aula ni con la enseñanza a través de la resolución de problemas no puedes intentar hacerlo todo a la vez. Tienes que ir priorizando, porque no te va a salir bien a la primera y te vas a desmotivar tú y tu alumnado. Yo priorizaría la «didáctica» y me lanzaría con el trabajo por grupos una vez tengas confianza y seguridad con la enseñanza a través de la resolución de problemas (puedes ir probando por parejas, que es más manejable en cuanto a gestión de aula). Además, es importante recordar que cada cambio metodológico que introducimos en el aula (ya sea en el método de enseñanza o en el de trabajo en clase) debe ir acompañado de su correspondiente cambio en el método de evaluación.

Para la parte de gestión del aula y el trabajo por grupos es importante aprender a usar estructuras cooperativas (Kagan y Kagan, 2009) (Pujolás y Lago, 2011). No es tan fácil como pedirles que trabajen en grupos en unos problemas. A trabajar en grupos también se aprende y es algo que no viene dado «por ciencia infusa». Si estás encima de ellos no hay problema, pero muchas veces cuando estás atendiendo a un grupo el resto de los grupos se dispersa. Hacen falta estructuras que les ayuden a no despistarse (algo que ocurre con facilidad si no están acostumbrados a trabajar así). Aparte del uso de estructuras, yo uso otros recursos para conseguir que el trabajo en grupo sea tiempo de trabajo y no tiempo libre. Por ejemplo, a veces ponemos en la pizarra una tabla con los grupos y diferentes etapas o apartados del trabajo que tienen que hacer, y cada grupo tiene que ir indicando en qué punto o etapa está (de forma que todos vemos por dónde va cada grupo). Otro recurso, proveniente del aprendizaje cooperativo, es el uso de roles dentro de cada grupo (para controlar el volumen del grupo; vigilar que todos trabajan, participan y no haya nadie descolgado; asegurarse de que están haciendo y trabajando en lo que les he pedido, etc.).

Advertencias

El cambio en la cultura de aula cuesta, tanto para el alumnado como para el profesorado. El alumnado tiende a rebelarse, sobre todo el que iba bien con la metodología anterior («a mí explícame la teoría y los ejercicios y déjame hacer luego un examen»). Es una batalla a largo plazo y hay momentos en los que dan ganas de tirar la toalla.

Hay que tener cuidado al quitar el libro de texto, sobre todo si el alumnado está acostumbrado a trabajar con él. Con todas sus desventajas, el libro de texto les sirve para organizarse y tenerlo todo más ordenado (tanto físicamente, con menos materiales de los que estar siempre pendiente, como a nivel cognitivo). Debemos tener esto en cuenta cuando diseñemos los materiales que vamos a utilizar, para que no les suponga un impedimento ni una excusa de rechazo. Es importante ir gestionando y modificando los materiales en función de lo que vayamos observando a lo largo del curso.

Las clases no «cunden» tanto, porque te adaptas más al ritmo de aprendizaje del alumnado que al ritmo de tu propia explicación. En una enseñanza más expositiva la docente explica y hace varios ejercicios para tratar un determinado objeto matemático. Al ser la docente la que hace los ejercicios, va más rápido. En cambio, el alumnado tarda bastante más en hacer los problemas, pero los hacen ellos. De esta manera, hay que estar preparada para que en una sesión se resuelvan muchos menos problemas (a veces ni siquiera uno entero). Aunque se hagan menos problemas se tratan en profundidad las dificultades de comprensión, y no es necesario hacer tantos ejercicios.

Figura 3. Midiendo la longitud del borde de un plato (problema propuesto en las orientaciones metodológicas del currículo para trabajar el sentido de la medida)

Desde el punto de vista didáctico, hay un cambio de concepción de lo que son los problemas. Los problemas más ricos o que dan más juego son muchas veces abiertos a interpretaciones o resoluciones diversas. Yo lo visualizo como el paso del «corregir» al «poner en común». Cada vez utilizo menos en clase la palabra «corregir», y más la «puesta en común». Aquí entra en juego también la calificación. Muchas veces dejamos de poner este tipo de problemas porque estamos pensando en la calificación, y ¿cómo narices calificamos este problema? Estos quebraderos de cabeza desaparecen cuando dejamos de pensar tanto en la calificación.

Valoraciones finales

Hace unos meses, unos compañeros docentes de otro centro me preguntaron de manera sincera: ¿pero tú de verdad crees que esto funciona? Mi respuesta fue rotunda: sí. Y no estoy hablando de si es más beneficioso o inclusivo, sino de si de verdad es viable y funciona en las aulas en la práctica diaria.

El proceso es largo y tiene sus altibajos. Más aún si es la única asignatura en la que el alumnado trabaja de esta manera. Pero aun así funciona, y los beneficios superan con creces todos los obstáculos en el camino de su implementación. En 1.º de ESO me ha costado, porque es radicalmente diferente a lo que están acostumbrados, pero se han adaptado y a partir de la segunda evaluación ya están un poco más cómodos. En 3.º y 4.º de ESO me está costando mucho más. El curso pasado acabé recurriendo al libro de texto y a más clases explicativas de lo que me gustaría. Todavía resuena en mi cabeza el «a buenas horas, profe» que me contestó una alumna de 4.º cuando les hablé del cambio de metodología. Y por mucho que me pesara, tenía toda la razón. No me parecía justo que, encima de la carga de trabajo que suponían las matemáticas para gran parte de mi alumnado, además tuvieran que hacer el esfuerzo extra de adaptarse a una nueva metodología que solo seguían en mi materia, y que probablemente no volverían a usar nunca más.

Quiero terminar remarcando lo importante que es tener y sentir apoyo de los compañeros del instituto, y en especial, del propio departamento. De lo contrario es muy complicado. En mi caso, mis compañeras no solo han escuchado mis ideas, sino que se han lanzado conmigo a ponerlas en práctica. Gracias a ello, y a ellas, he podido escribir este artículo contando mi experiencia. Espero que sea una de muchas.

Referencias bibliográficas

Alsina, À., y M. Domingo (2007), «Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas». *Suma*, 56(1), 23-31.

Beltran-Pellicer, P. (4 de noviembre de 2020), «Una propuesta de evaluación en Matemáticas (ESO, adaptable a Primaria)», *Tierra de números*, <https://tierradenumeros.com/post/hilo-evaluacion-calificacion-propuesta-completa/>.

Una experiencia de *Escape Room* matemático para alumnado de Primaria acompañada por futuros maestros y maestras

por
Andrea de la Fuente Silva, Angélica Benito Sualdea y Rocío Garrido Martos
(Universidad Autónoma de Madrid)

Las salas de escape o *escape rooms* despiertan la curiosidad y motivan a un grupo a coordinarse para alcanzar un objetivo previamente propuesto. Esta actividad de ocio entre amigos ha conseguido hacerse hueco en las aulas con éxito. El gran incremento de publicaciones que utilizan los *escape rooms* como herramienta didáctica son un indicativo de cómo sus componentes facilitan a los estudiantes cooperar, comunicar, ser críticos y aprendices activos (Hayden y otros, 2022).

Al igual que ocurre con el creciente interés por el uso de nuevas metodologías, cuando nos planteamos introducir una nueva herramienta en el aula, nos lanzamos directamente a pensar en el «cómo llevar», sin reflexionar antes en el «qué es». Por este motivo, hemos introducido la formación, el diseño y la implementación de los *escape rooms* en el aprendizaje de los futuros maestros y maestras. Nuestra finalidad es que el alumnado del grado de Educación Primaria conozca y viva en primera persona todo el proceso que requiere incorporar esta herramienta didáctica en el aula.

La experiencia constó de varias etapas: formación en gamificación y diseño de *escape rooms*; vivenciación de un *escape room* de contenido matemático; participación y acompañamiento de una experiencia con alumnos de 4.º curso de un colegio público del norte de Madrid; valoración de esta propuesta didáctica y reflexión sobre la posible incorporación a su práctica docente.

Marco teórico

Los *escape rooms* se podrían situar dentro de las metodologías que utilizan el juego o algunos elementos del juego como base. En los últimos años se ha generado una nueva cultura en relación a los juegos de mesa, videojuegos, juegos de rol… que llevan a la necesidad de asentar las bases de estas metodologías. En particular, hablamos de la gamificación y el aprendizaje basado en juegos (ABJ), pero encontramos una gran confusión entre ellas en la literatura, ya que se utilizan ambos términos para hablar de cualquier propuesta que utilice el juego como recurso didáctico (Álvarez-Herrero, 2022). Muchos docentes se lanzan a usar este tipo de corrientes sin tener en cuenta el proceso seguido por la didáctica de la materia ni el profundo trabajo sobre juegos en el aula, y haciendo uso del término sin ser lo que se practica (Muñoz y otros, 2019). Y lo mismo ocurre con los *escape rooms*, podemos encontrar diferentes posturas sobre su clasificación.

En este trabajo consideramos los *escape rooms* como un caso particular de gamificación. Se toman ciertos elementos, mecánicas y estrategias del juego para crear nuevas experiencias en las que el alumnado se adentra. Si planteamos este tipo de experiencias con el objetivo de conseguir un mayor compromiso, motivación, esfuerzo e inspiración del alumnado hacia la tarea, hay que vigilar qué y cómo se incorporan ciertos elementos, ya que la

competitividad y el premio suelen estar presentes en el juego, y puede que no sean adecuados para ciertas etapas (Alsina y otros, 2022).

Los *escape rooms* tienen incluso variantes y se debate sobre si se utiliza bien su nombre desde la aparición del término *BreakoutEDU*. En ambos se tienen que resolver pruebas, en un tiempo limitado, pero el objetivo es el que marca la diferencia: escapar de una habitación cerrada en el caso de los *escape rooms* o abrir varios candados de una caja en los *BreakoutEDU* (Cornellà y otros, 2021).Aquí los seguiremos llamando *escape rooms*, ya que como dicen Ouariachi y Wim (2020), simplemente se utiliza el concepto adaptándolo a las necesidades del alumnado en el aula.

Este tipo de actividad da una gran libertad para elegir las pruebas y las temáticas del juego. Se puede conectar fácilmente con los contenidos de la materia o las materias que se estén trabajando, ambientando la experiencia en contextos cercanos para el alumnado. Como dice Beltrán-Pellicer (2022), se puede entender «contexto» por algo que no implica real necesariamente y, «cercano» no tiene por qué ser algo de la vida cotidiana, sino que sea significativo.

Este enfoque didáctico supone un desarrollo y cambio en los planes de estudio, tanto para estudiantes como para el alumnado en formación docente (Hayden y otros, 2022). Si se quiere que los futuros maestros y maestras tengan en cuenta este tipo de experiencias en sus programaciones docentes, un buen punto de partida es vivir estas experiencias en primera persona. Hay muchos sitios en los que ofrecen este tipo de *escape rooms* en vivo con gran variedad de temáticas, grados de dificultad y modalidades (Brusi y Cornellà, 2020). Desde la asignatura de Juegos y propuestas didácticas para el aprendizaje de las matemáticas, nuestra propuesta va más allá. Este año hemos tenido la oportunidad de llevar al aula universitaria un escape room matemático, pero no solo eso, hemos podido ponerlo en práctica con alumnado de Educación Primaria (en adelante, participantes) para que los futuros maestros y maestras reflexionen también desde el punto de vista del docente.

Misión Espacial: Salir de la Luna, una experiencia en la formación de futuros maestros y maestras en la UAM

Preparación de la experiencia

Cuando se habla por primera vez en clase de «preparar un *escape room*», rápido se lanza el alumnado de grado a pensar qué pruebas pondremos o la ambientación que tendrá la sala. Pero antes, hay que formarse en todo lo descrito en el punto anterior, mostrando la importancia de ser conscientes de las diferencias que supone utilizar una u otra metodología o herramienta didáctica. Además, nuestra planificación tendrá en cuenta: tipo de alumnado, tiempos y número de pruebas, dificultad, objetivos de aprendizaje, temática, espacio, enigmas, materiales y tecnología, evaluación y ensayo (Segura y Parra, 2019). Como se puede comprobar, mucho más que el tema y las pistas.

Por otro lado, no podemos olvidar que esta experiencia está enmarcada dentro de una asignatura de didáctica de las matemáticas. Sobre el grupo de participantes solo se tenía información de los contenidos que estaban trabajando ese trimestre y que los ritmos de aprendizaje eran muy diversos, lo que supone un reto para poder adaptar la propuesta correctamente, pero permite realizar una amplia reflexión con los futuros docentes. Las siguientes preguntas pueden ayudarnos en el planteamiento del diseño: ¿Qué sentido o sentidos queremos trabajar? ¿Dónde ponemos el foco matemático: en la prueba o en la pista? ¿Todas las pruebas tienen que tener una componente matemática? ¿Cuál es el objetivo final del escape room? Cabe destacar que no debe confundirse el objetivo final del juego con el objetivo de proponer el *escape room*.

Contexto

La experiencia tuvo lugar en el Seminario de Matemáticas de la Facultad de Formación del Profesorado de la Universidad Autónoma de Madrid. Se desplazaron hasta nuestras aulas dos grupos de 4.º de Educación Primaria (16 y 20 participantes), junto a sus tutoras, de un centro público del norte de Madrid. La actividad se realizó durante el horario de la asignatura optativa de 4.º, Juegos y propuestas didácticas para el aprendizaje de las matemáticas, del grado de Educación Primaria. Estuvo acompañada por los estudiantes matriculados, quienes se repartieron por los distintos equipos que se hicieron para el *escape room*. En paralelo, para el correcto desarrollo de

la actividad, se realizó un taller de juegos de mesa, de modo que en una clase estaban con los juegos y en la otra con el *escape room*, cambiando pasada una hora.

Descripción del juego

El aula se convirtió en la sede secreta de la Agencia Espacial Europea (ESA) (figura 1). Durante 45 minutos, los grupos de participantes (alumnado de 4.º de Primaria) se convirtieron en agentes especiales con una misión muy importante: ayudar a los astronautas a salir de la Luna. Pablo Álvarez y Sara García, los nuevos miembros españoles del equipo de la ESA, se habían puesto en contacto con ellos para pedirles ayuda. La nave no arrancaba y los as-

Prueba 1. Problema de medida del tiempo (figura 2)

Tener que pasar de minutos a segundos requería que recordasen las equivalencias entre unidades de tiempo. Este estilo de problema se asemeja a lo que suelen trabajar en clase y, siendo el primero, se buscaba conectar con lo que se sienten «cómodos» haciendo o, al menos, con algo conocido. Al resolver esta prueba obtenían el código del primer candado.

Figura 1. Sede secreta UAM-ESA

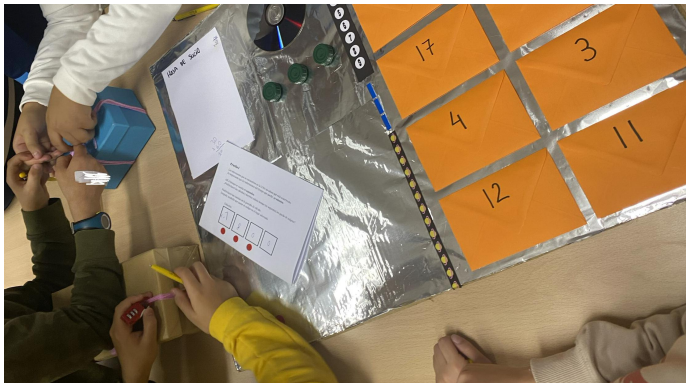


Figura 2. Conseguida prueba 1

Prueba 2. Lectura de números (figuras 3 y 4)

En esta prueba debían leer números escritos en letra y encontrarlos en una sopa de números (en cifras). A pesar de parecer que no suponía gran dificultad en cuanto a contenido, requería cierto grado de concentración y observación, ya que algunos números tenían un cero más o alguna cifra cambiada de posición que podía llevar a confusión. La solución les proporcionaba la pista que indicaba el sobre (numerado) que debían abrir.

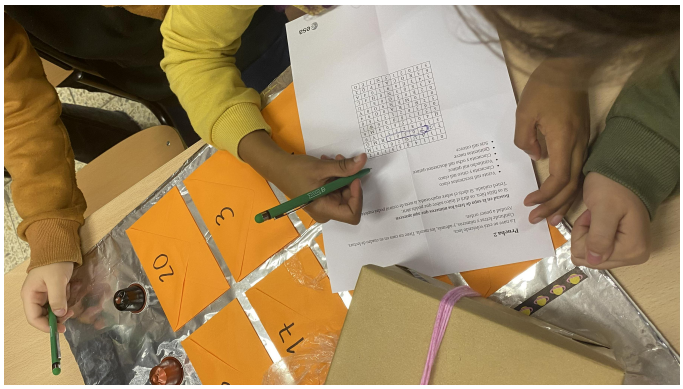


Figura 3. Sopa de números

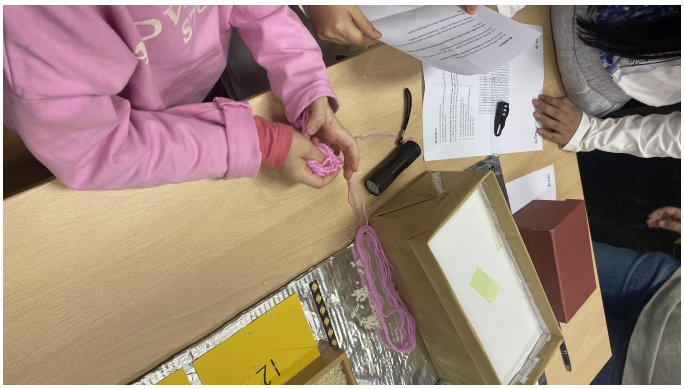


Figura 4. Conseguida prueba 2

Prueba 3. Cálculo de volúmenes (figuras 5 y 6)

A pesar de no haber visto aún la parte del currículo relacionada con la estimación de medidas de longitud, masa y capacidad por comparación, la presentación de este problema con material manipulativo permitió adaptar esta prueba. De manera natural, tendieron a plantear nuevas estrategias de comparación y ordenación para saber en «cuál cabe más», sin necesidad de asociarlo a fórmulas u otros conceptos más complejos. La resolución daba el código para la apertura de otro candado.

Figura 5. Prueba 3 con arroz

Figura 6. Comparación de volúmenes

Prueba 4. Constelaciones (figuras 7 y 8)

Esta prueba no tenía relación directa con un contenido matemático concreto. Había que resolver un problema: un folio en «blanco», una linterna de luz ultravioleta y una pizarra con las constelaciones dibujadas, ¿qué información se consigue si se une todo? Responder esta pregunta permitía abrir un nuevo sobre que proporcionaba a cada grupo una pista distinta de cómo abrir el candado final.

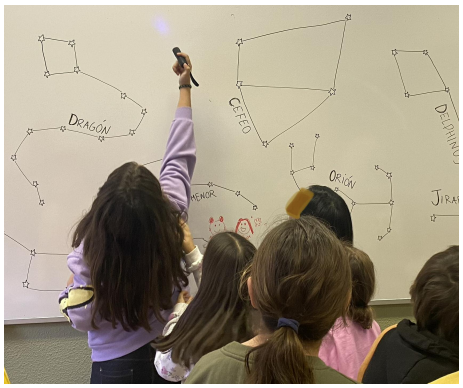


Figura 7. Pizarra constelaciones

Figura 8. Pista con luz ultravioleta

Figura 9. Misión cumplida

Prueba final (figura 9)

Para acabar tenían que resolver un juego de lógica que solo se podía conseguir si todos los grupos trabajan juntos poniendo en común sus pistas. Es una manera de equilibrar que todos los equipos acaben llegando a este punto del juego al mismo tiempo. Dentro de esta última caja, que se abre con el código común, está el botón que activa la nave. Cuando todos los alumnos lo pulsan se para la cuenta atrás y se muestran las «imágenes en directo de La Luna» (o eso creyó parte del alumnado). La nave consigue despegar y ya están de camino a casa sanos y salvos.

tronautas que se encontraban en la Luna estaban a punto de quedarse sin oxígeno. El objetivo era conseguir arrancar la nave para volver a casa sanos y salvos.

La clase se dividió en cuatro subgrupos y cada equipo, desde su puesto de control, tenía que ir resolviendo las pruebas que iban apareciendo a medida que avanzaba el juego. Todas las pruebas estaban conectadas de forma lineal, es decir, resolver una prueba, te daba la pista para abrir la siguiente. A continuación, se describen brevemente las pruebas:

El desarrollo completo de la actividad para poder ponerla en práctica en el aula se puede encontrar en este enlace.

Evaluación

Después de la puesta en práctica, se inicia el período de análisis y reflexión sobre lo vivido. En este caso, aunque el juego fuese diseñado para el alumnado de Primaria, se trataba de una actividad puntual y no buscaba alcanzar un aprendizaje concreto sobre ciertos contenidos de la materia, sino ofrecerles propuestas diferentes en las que fuese posible combinar aprendizaje y disfrute en la asignatura de Matemáticas. El objetivo principal recaía sobre el alumnado de grado, quienes tenían que valorar el acompañamiento que realizaron durante un juego, la adecuación de la propuesta didáctica y reflexionar sobre la posible incorporación a su práctica docente.

Se tuvo una sesión grupal en la que se evaluó con el alumnado de grado todo el desarrollo de la experiencia. La observación constante durante el juego, la actitud de los participantes, las emociones que surgieron, las interacciones entre los miembros del grupo, los estilos de comunicación que se trabajaban y los comentarios de los niños y niñas durante todo el desarrollo de la actividad fueron fundamentales para dar sentido a las reflexiones y comentarios de nuestros estudiantes. La evaluación de la experiencia fue recogida por cada futuro maestro y maestra en sus portfolios personales de la asignatura, de la que recibieron retroalimentación, y donde hicieron especial énfasis sobre la valoración del acompañamiento.

Resultados y Conclusiones

El desarrollo de cada una de las etapas de la experiencia alcanzó con éxito los objetivos propuestos inicialmente. De la evaluación que se tuvo en gran grupo, de las reflexiones leídas en sus portfolios y de nuestra propia evaluación docente, hemos podido sacar algunas conclusiones que exponemos a continuación.

En cuanto a la formación previa sobre gamificación y *escape rooms*, son muchos los comentarios que recalcan la necesidad de la misma para entender bien en qué consiste esta propuesta didáctica y todos los elementos involucrados.

> Estudiante 1: Antes de realizar el *escape room* en el aula, pensaba que era una actividad dedicada exclusivamente al entretenimiento, no me había planteado los componentes didácticos que se trabajaban en él.

> Estudiante 2: Me ha gustado haber podido entender bien la diferencia entre aprendizaje basado en juegos y gamificación, ya no solo de forma teórica, sino de forma práctica.

Respecto al diseño, poder ponerlo a prueba antes de llevarlo al aula, te permite observar los errores cometidos, plantearte nuevas cuestiones y abordarlas de cara a mejorar las futuras experiencias.

> Estudiante 3: Además, comprobamos que antes de llevar al aula cualquier juego o actividad debemos ponerlo en práctica, para ver si todos los pasos que hemos planteado están bien hilados, si las explicaciones son las adecuadas, si hay que incluir algún aspecto importante, etc.

> Estudiante 4: Una mejora en las pruebas del *escape room*: yo haría que cada prueba tuviese algo menos de texto, sobre todo si está pensado para grupos con necesidades educativas ya que esto puede ser una barrera.

El alumnado destaca la buena elección en cuanto a la ambientación escogida. Tendemos a pensar en utilizar hilos conductores de películas que podrían haber visto o algo que esté de moda en el momento, pero no es determinante para crear salas de escape que motiven. Hay que tener en cuenta el papel que toman los participantes dentro de la ambientación y situarlos como protagonistas de la actividad. Además, la elección de la historia en la que se sumergen puede ser una buena oportunidad de aprendizaje. En este caso, a muchos les sonaba la NASA, pero era la primera vez que escuchaban hablar sobre la ESA. A través de la introducción del juego se hizo un re-

corrido por los hitos históricos relacionados con el espacio y dio pie a comentar la noticia de actualidad sobre el nuevo fichaje de dos nuevos astronautas españoles, Pablo y Sara.

Estudiante 4: El tema que se escogió para la creación del escape room fue acertado en mi opinión, ya que se les daba el protagonismo de salvar al mundo a través de sus actos. Eso a todos los alumnos les motiva mucho y les hace implicarse más en las actividades para sentirse importantes.

Uno de los principales puntos que trabajamos en la asignatura es la importancia del acompañamiento y el arte que supone. Como dice Carmona y Cardeñoso (2019) es una habilidad por parte de los docentes que requiere voluntad, destreza, sensibilidad, desarrollo y muchos intentos fallidos.

Estudiante 5: En ocasiones sentimos la tentación de darles más pistas, supimos reconducirlo y guiarles para que lo averiguaran ellos, por lo que fue muy enriquecedor para todos.

Estudiante 6: En el momento de acompañar al grupo durante el escape room, lo que me llamó más la atención es todo lo que se puede trabajar más allá de los contenidos, pero igual, o incluso más importante.

El alumnado destacó que durante el acompañamiento también es posible darse cuenta de sus conocimientos previos y dificultades de aprendizaje, sin apenas conocerles. Se evidenció que una de las clases tenía grupos con más necesidades específicas que requerían un mayor acompañamiento.

Estudiante 7: Durante el desarrollo del escape room, para ser un cuarto curso de Educación Primaria, mostraron no tener adquiridos y/o asentados ciertos conocimientos, por lo que en algunas actividades necesitaron más ayuda por nuestra parte que en otras...

Estudiante 4: Tenían dificultades sobre todo a la hora de leer y prestar atención durante un período largo. Pero una vez que se les ayudaba a comprender lo leído, todos eran capaces de resolver las pruebas«

Estudiante 8: Se observaban muchas diferencias entre el grupo «A» y el grupo «B», no solo por el tiempo que tardaron en superar las diferentes pruebas del escape sino en la relación de compañeros y compañeras de trabajo.

Conseguir el objetivo final del escape room (que los astronautas salgan de la Luna) no depende únicamente de desarrollar destrezas matemáticas, este hecho general que nos tendríamos que plantear en cada escape room da más oportunidades a todos los miembros del grupo para aportar a través de otras habilidades y competencias.

Estudiante 9: Otra cosa de las que me di cuenta fue ver cómo cooperaban entre ellos, ellos se conocían bastante y dependiendo de lo que había que hacer en cada prueba, se ponía uno u otro como jefe de esa prueba mientras que los demás le ayudaban.

Estudiante 10: Pudimos observar las debilidades y fortalezas de los diferentes alumnos del grupo, ya que en función de lo que tratasen las distintas pruebas, algunos participaban más y otros menos.

La colaboración y el trabajo en equipo es una de las características principales de los *escape rooms*, esto conlleva también que los acompañantes tuvieran que mediar ante otro tipo de circunstancias, no solo de contenido matemático, sino de relación entre miembros del grupo: el reparto de tareas, la participación por parte de todo el equipo o el trato entre compañeros.

Estudiante 8: En el grupo que «dirigíamo»" mi compañera y yo, los educandos no dejaban participar a unos compañeros o los apartaban por ser más lentos, por lo que se intentó mediar y dejar que todos participaran por igual.

Otro de los puntos a destacar en los *escape rooms* es la facilidad de generar emociones y actitudes hacia la tarea. Las tutoras indicaron que, dadas las dificultades con las que se encontraban día a día con la gestión del aula, era un punto muy favorable que este tipo de actividad consiguiera tenerles tan enfocados, y en concreto, que estuvieran tan concentrados haciendo matemáticas. Los niños y niñas atendieron a las instrucciones desde el principio, jugaron dentro de un clima de diversión controlado y tenían una alta implicación en pequeño grupo para conseguir el reto. Durante el juego se hicieron visibles sus emociones.

Estudiante 1: Se podía apreciar en sus caras la ilusión y lo ansiosos que estaban por empezar con esta actividad a la que quizás no estaban acostumbrados.

Estudiante 11: Vimos a los niños haciendo actividades matemáticas con una sonrisa en todo momento, algo que nos sorprende, pero que entendemos, ya que es una actividad original y que seguro que nos hubiese encantado a muchos hacer cuando éramos más pequeños.

Para crear salas de escape no hace falta espacios muy amplios, utilizar materiales que supongan un alto coste, sobrepasar el tiempo de una clase habitual o que solo puedan jugar grupos reducidos. Esta idea tan generalizada que lleva al rechazo de usar esta herramienta en las aulas, es algo que ha sorprendido a nuestro alumnado, comprobando que es posible plantear un escape room adaptado a cada realidad.

> Estudiante 7: No pensaba que fuese posible realizar un escape room «desde el sitio», consideraba que era necesario disponer de más espacio y varias salas para poder hacerlo. He podido comprobar la posibilidad de adaptar cualquier idea, recurso y material en función de la situación, algo que por mucho que me hubieran dicho a lo largo de la carrera no creía posible en algunas ocasiones.

> Estudiante 12: Me pareció útil entender que puedes diseñar una ambientación general y un escape room individual por grupo, que luego puede unirse en una prueba final colectiva.

Para acabar con la discusión de los comentarios del alumnado, cabe destacar que a pesar de las buenas sensaciones que se vivieron, se sigue apreciando cierta inseguridad ante la idea de verse una persona sola en el aula o por la complejidad del proceso del diseño. Ante estas situaciones, este tipo de experiencias se vuelven fundamentales para ponernos a prueba en un ambiente de confianza. Es aconsejable empezar planteando propuestas sencillas y tratar de utilizar materiales que otros docentes ponen a nuestra disposición.

> Estudiante 13: La realidad es que considero que no sería capaz de desarrollar mi propia escape room en el aula. Sin embargo, sí me veo capaz de aplicar una ya hecha, puesto que he comprendido cómo debemos guiar y motivar a los alumnos.

Por nuestra parte, de cara a futuras experiencias, vista la buena acogida que ha recibido la propuesta, creemos que podemos incorporar mejoras relacionadas con la evaluación. Por ejemplo, se propone utilizar rejillas de observación previamente diseñadas para facilitar que el alumnado acompañante recoja información. También, al finalizar el juego, ya que se ha creado un vínculo entre estudiantes y participantes y hay un clima agradable en el aula, sería recomendable establecer un espacio de tiempo para que nuestros estudiantes puedan entrevistar al grupo de participantes de manera más formal y no solo a través de «comentarios en el pasillo» o las impresiones durante el juego. Además, se propone diseñar junto al alumnado herramientas de evaluación sobre los contenidos trabajados, para después, validar su efectividad tras la práctica.

En definitiva, se muestra una actitud positiva por parte de los futuros maestros y maestras hacia el uso de *escape rooms*. Destacamos de nuestra propuesta que, al ofrecer experiencias reales acompañando el juego, agradecen vivirlo como jugadores, pero también viendo lo que supone hacerlo desde la figura y rol que debe tomar el docente. Tener estas experiencias durante la formación inicial ofrece una visión más amplia de lo que supone la puesta en práctica de este tipo de propuestas metodológicas. Es esencial que se les proporcione una buena formación en todos los aspectos, desde el diseño hasta la evaluación, incluyendo la responsabilidad de una adecuada reflexión posterior que les permitirá seguir mejorando su práctica docente.

Referencias bibliográficas

Alsina, Á., A. Berciano, C. De Castro, M. Edo, J. Giménez, C. Jiménez-Gestal, M. Prat, M. Somoza y Y. Vanegas (2022), «Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática», *Matemáticas en la Educación Infantil*, Editorial Universidad de Granada, 107-147.

Álvarez-Herrero, J. F. (2022), «Gamificación frente a aprendizaje basado en el juego», en Bermúdez, M., y Sánchez, A. (coord.) *Filosofía, tecnopolítica y otras ciencias sociales: nuevas formas de revisión y análisis del humanismo*, 865-879.

Beltrán-Pellicer, P. (2022). «El nuevo currículo de Matemáticas y las situaciones de aprendizaje». *Heraldo de Aragón, suplemento Tercer Milenio*, 13 de diciembre de 2022.

Brusi, D. y P. Cornellà (2020), «Escape rooms y Breakouts en Geología. La experiencia de "Terra sísmica"», *Enseñanza de las Ciencias de la Tierra*, 28 (1), 74-88.

Carmona, E., y J. Cardeñoso (2019), «Situaciones basadas en juegos de mesa para atender la elaboración del conocimiento matemático escolar», *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, 101, 57-81.

Cornellà, P., M. Estebanell y D. Brusi (2020). «Gamificación y aprendizaje basado en juegos», *Enseñanza de las Ciencias de la Tierra*, 28(1), 5-19.

Hayden L., F. Olav, M. Skjerdal, P. Reitan y E. S. Jenssen (2022), «A review on use of escape rooms in education touching the void», *Education Inquiry*, 13 (2), 169-184, <https://doi.org/10.1080/20004508.2020.1860284>.

IFRN ZYNM QWXM ONIB IKNM AOHK WSZZ JT [1] (Aritmética modular y criptografía… en 4.º ESO)

por
Christian H. Martín Rubio
(IES Clara Campoamor Rodríguez, Zaragoza. Facultad de Educación, Universidad de Zaragoza)

El juego entre criptógrafo y criptoanalista me ha solido aportar buenos resultados en esas clases pertenecientes al limbo prevacacional, aquellos pocos días que anteceden al fin del año natural y del curso escolar en que, todas las docentes, hemos sentido no saber muy bien qué hacer. Encriptar mensajes y que otro equipo los deba desencriptar, hablar de algunos métodos, de la máquina Enigma y de nuestro Antonio Camazón, de su presencia en películas y documentales, de su uso actual y, si daba tiempo y existía interés, tratar explícitamente las matemáticas que subyacen en ese juego, me han permitido disfrutar de la implicación del alumnado en una actividad matemática, algo que en otras ocasiones se hace casi imposible.

Desde esa experiencia, una agradable sorpresa me esperaba en algo tan tedioso como conocer una ley. En el apartado correspondiente de nuestra nueva ley educativa [2] aparece una asignatura optativa, en 4.º de la ESO, que lleva por nombre Matemáticas para la toma de decisiones y cuyos saberes están organizados en torno a tres grandes bloques: aritmética modular y criptografía, teoría de grafos y teoría de juegos. Además, se hace hincapié en el diseño y aplicación de algoritmos y en el uso de herramientas informáticas para implementarlos, «(…) formular conjeturas y ponerlas a prueba y para encontrar soluciones a problemas de manera efectiva y constructiva». ¡Existía una asignatura en el currículum para trabajar la criptografía, utilizando medios informáticos y donde el alumnado debía diseñar sus algoritmos, implementarlos y resolver de forma constructiva los problemas! [3]

Figura 1. Teclado de la máquina Enigma

Buscando una mayor concreción de mis ilusiones, busqué los saberes básicos sobre los que gira el primer tercio de la asignatura, encontrándolos divididos en cuatro bloques:

— Aritmética en $\mathbb{Z}$
— Aritmética modular
— El conjunto $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
— Criptografía

A partir de ahí lo que se me planteaba era el complicado paso del deseo a la realidad, ¿cómo llevar esto al aula? Aquellas animadas clases a las que hacía referencia al comienzo del artículo, ¿en qué se iban a convertir si me ponía a explicar la identidad de Bézout, las relaciones de congruencia o el conjunto de clases módulo *m*? ¿Podía hacerlo de otra forma? Reconozco que ya estaba predispuesto, pero una pista más me esperaba en las sugerencias didácticas y metodológicas: «(…) el papel de la historia de las matemáticas puede ser relevante a distintos niveles.» ¿Por qué empezar por los resultados finales? Uno de los elementos positivos del valor didáctico de la historia de las matemáticas es que el alumnado vaya descubriendo los resultados a través de la evolución natural de las ideas. ¿Hace falta conocer explícitamente las relaciones de congruencia para saber que con el código César, después de la Z, vendrá la A, que después del 26, vendrá el 0?

Esa es la base de la propuesta de este artículo y del taller presentado en la V JEMA. Partir de los métodos de encriptación más fáciles e ir descubriendo los contenidos matemáticos necesarios a partir de la resolución de los problemas surgidos en nuestra tarea. Y todo ello apoyado con el uso de diferentes herramientas informáticas, desde una hoja de cálculo hasta el SAGE o el Máxima.

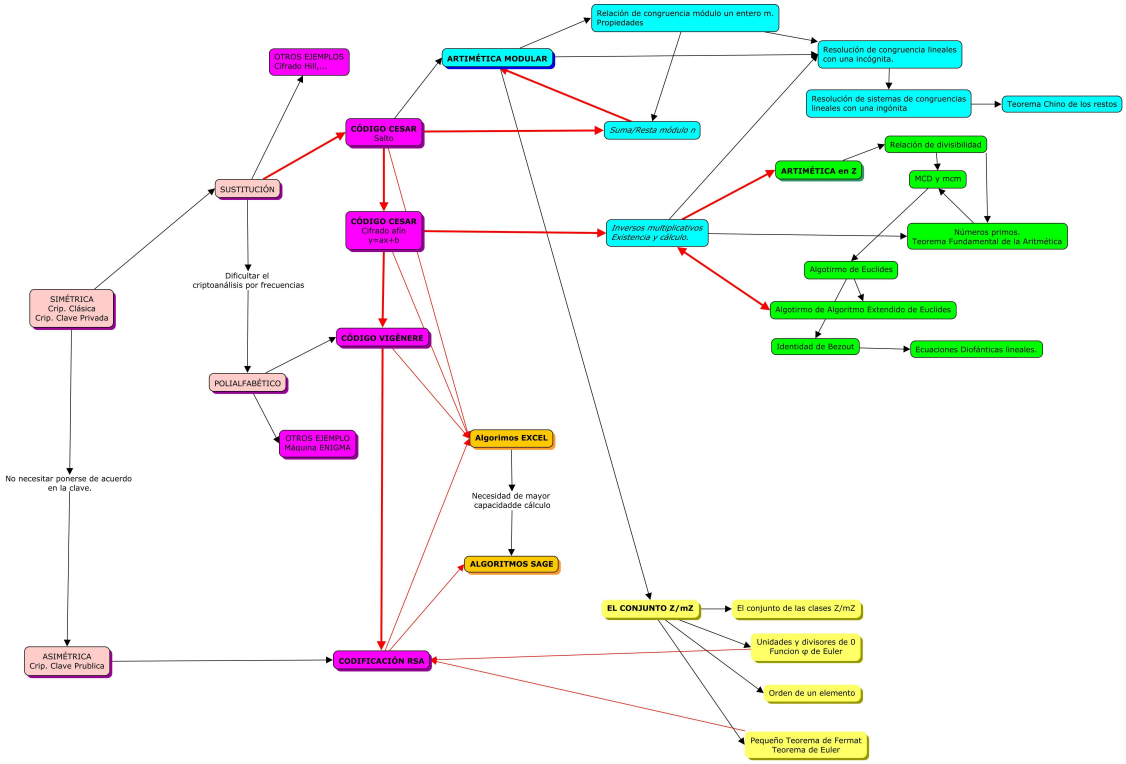


Figura 2. Mapa de la propuesta de desarrollo de la asignatura Aritmética modular y criptografía

En la bibliografía adjunta y en los materiales subidos en la *classroom* en la que se desarrolla la asignatura, podemos encontrar numerosos cifrados iniciales.

Uno de los métodos que aparecen más tempranamente son los cifrados de sustitución simple, en el que cada letra o signo del texto llano se sustituye por otro de acuerdo con un método determinado. En concreto vamos a partir de uno ampliamente conocido, el código César, recogido en la obra del historiador romano Suetonio (c. 70- c. 126) que lleva por título *De vita Caesarum* (*Vidas de los Césares*) (ap. 121).

Figura 3. Julio Cesar y Suetonio

Este método es extremadamente sencillo. Consiste en desplazar un número determinado de veces cada letra del abecedario. Es decir, basta con hacer corresponder la «A» con otra letra y seguir las siguientes en el mismo orden.

En el ejemplo que aparece en la figura 4 haciendo corresponder la «A» con la «C» obtendríamos el cifrado de «HOY ES SÁBADO». Se puede observar que al no aparecer las letras «Y» y «Z» en el mensaje llano, no es necesario resolver qué pasa con el resto de letras tras haber asignado a la «X» la letra «Z».

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B

H	O	Y		E	S		S	A	B	A	D	O
J	Q	A		G	U		U	C	D	C	F	Q

Figura 4

Si numeramos las letras, comenzando con la «A» como 0, hasta la «Z» como 26, es decir, trabajamos en módulo 27, diremos que el cifrado anterior tiene salto 2, número correspondiente a la letra «C». De esta forma, con la simple operación de sumar 2 al número correspondiente a cada letra, obtendremos el texto cifrado. Por ejemplo, la «H», número 7, le corresponderá la letra 7+2=9, que es la «J». Y para descifrar, bastará con restar 2 al número de la letra correspondiente en el texto cifrado. Con estas operaciones, aún eligiendo un salto no muy grande y una frase con pocas palabras, deberemos resolver el problema de trabajar en aritmética modular y por tanto podemos adentrarnos en la explicación de esa parte de la teoría, de muy fácil implementación en una hoja de cálculo[4].

Salto: 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

V	A	M	O	S	A	A	C	A	B	A	R	C	O	N	C	E	S	A	R	B	A	S	I	C	0
F	K	V	Y	C	K	K	M	K	L	K	B	M	Y	W	M	Ñ	C	K	B	L	K	C	R	M	Y

Z	Ñ	B	Y	Q	K	I	Y	D	B	Y	M	Ñ	C	K	B	M	Y	W	M	R	O	B	K	N	Y	K	O	R	W
P	E	R	O	H	A	Y	O	T	R	O	C	E	S	A	R	C	O	N	C	I	F	R	A	D	O	A	F	I	N

Figura 5

En el cifrado César con salto, bastaría solo resolver las sumas y restas módulo n, pero podemos dar un paso más en los cifrados y proponer que sea de salto afín. Este salto se caracteriza porque el texto cifrado se obtiene como $y = ax + b$, donde a y b son dos números y x es el texto llano. Para descifrar, tendríamos que $x = a^{-1}(y - b)$ y por lo tanto se nos presenta la necesidad de estudiar los inversos módulo n. En particular podemos ver que si elegimos un a que no sea primo con 27, nos dará errores[5]. Ese estudio de la existencia y cálculo de los inversos mutiplicativos nos da pie para introducirnos en la artimética en $\mathbb{Z}$: máximo común divisor, números primos, algoritmo extendido de Euclides, identidad de Bézout[6], etc., de nuevo no muy complicada su implementación en una hoja de cálculo[7].

a = 7; b = 1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Y	A	M	E	E	S	T	A	G	U	S	T	A	N	D	O	E	S	T	O
Ñ	B	E	C	C	Z	G	B	P	N	Z	G	B	L	V	Y	C	Z	G	Y

P	C	L	D	B	X	F	B	S	B	N	L	Z	B	I	B	V	Y
G	E	N	I	A	L	P	A	R	A	U	N	S	A	B	A	D	O

Figura 6

Con el fin de dificultar el criptoanálisis de estos cifrados[8] usando el método de las frecuencias[9] podemos pasar a los cifrados simétricos polialfabéticos, que marcaron la transición de la criptografía más clásica a la moderna. Estos se caracterizan por emplear de forma encadenada varias tablas o alfabetos de cifrado, de tal forma que cada letra es cifrada con un alfabeto distinto. Aunque el más famoso de estos métodos es la máquina Enigma, empleada en la II Guerra Mundial, su complejidad para un curso de estas características nos lleva a proponer trabajar con el cifrado Vigenère, caracterizado por su sencillez. Blaise de Vigenère (1523-1596) presentó este método en su libro *Traicté des Chiffres ou secrètes manières d'écrire* (1586), si bien había sido descrito anteriormente por Giovan Battista Belalso, en 1553.

Figura 7. Blaise de Vigenère

Se basa[10] en una tabla donde las columnas son las letras del mensaje y las filas son las letras de la palabra clave elegida. En el ejemplo que se muestra en la figura 8, la clave acordada es SOL y la comenzaremos a poner a partir del comienzo de la segunda palabra. Así la columna de la «C», primera letra a cifrar, se recorre hasta la fila de la «S», letra que le corresponde de la clave, dándonos la letra «U» que será el texto cifrado. A continuación, la columna de la «I», segunda letra a cifrar, se recorre hasta la fila de la «O», letra correspondiente de la clave, devolviéndonos la letra «W», etc. Para descifrar basta con hacer el proceso contrario: en la fila de la «S», localizo la letra «U» y copio la letra de la columna a la que pertenece, la «C», y así sucesivamente. Si volvemos a asignar,

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
		A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**Ñ**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
0	**A**	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
1	**B**	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a
2	**C**	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b
3	**D**	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c
4	**E**	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d
5	**F**	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e
6	**G**	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f
7	**H**	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g
8	**I**	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h
9	**J**	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i
10	**K**	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
11	**L**	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
12	**M**	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
13	**N**	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
14	**Ñ**	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
15	**O**	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ
16	**P**	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o
17	**Q**	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p
18	**R**	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q
19	**S**	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r
20	**T**	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s
21	**U**	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t
22	**V**	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u
23	**W**	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v
24	**X**	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w
25	**Y**	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
26	**Z**	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y

COLUMNAS: Letras del mensaje
FILAS: Letras de la palabra clave

		O	T	R	O		C	I	F	R	A	D	O
clave: SOL		**O**	**L**	**S**	**O**		**S**	**O**	**L**	**S**	**O**	**L**	**S**
		D	E	K	D		U	W	P	K	O	Ñ	H

Figura 8

de la misma forma que en los métodos anteriores, números a cada letra, podemos comprobar, por la disposicón de los alfabetos, que para encriptar basta con sumar, módulo 27, los códigos de la letra llana y de la letra correspondiente de la clave y para desencriptar, restar, módulo 27, el número de la letra correspondiente de la clave y el de la letra encriptada [11]. Toda la teoría matemática que sustenta este cifrado ya se ha podido dar en el curso con anterioridad, pero, su facilidad, nos puede permitir dirigir el trabajo del alumnado para que sea este mismo quien diseñe el algoritmo de encriptación-desencriptación y su implementación en una hoja de cálculo o en cualquier otra herramienta.

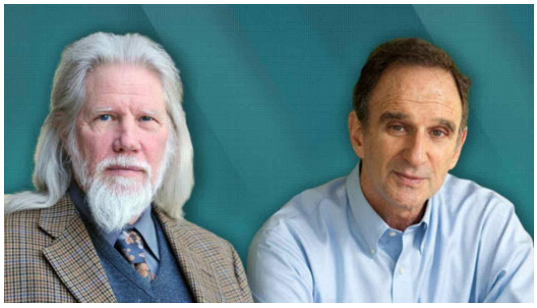


Figura 9. Whitfield Diffie y Martin Hellman

A la hora de su utilización, todos los métodos simétricos tienen un elemento que los perjudica: el emisor y el receptor deben ponerse de acuerdo en la clave utilizada. Como solución surgen históricamente los códigos asimétricos, la criptografía de clave pública. En 1976, Whitfield Diffie y Martin Hellman, publicaron el artículo «News Direcctions in Cryptography», en el que por primera vez se desarrolla formalmente la idea de comunicación segura sin necesidad de ese acuerdo inicial [12]. Un año antes, Malcolm Williamson, matemático del servicio secreto británico, había llegado exactamente a la misma idea, a partir de su intento de refutación del primer diseño de cifrado de clave pública propuesto en 1973 por Clifford Cooks, tambien del mismo servicio secreto. Ambos se basaban en las ideas de James Ellis, ya presentes a finales de los sesenta en ese servicio. Como vemos, y podemos transmitir en el aula, la historia de la criptografía nos vuelve a indicar cómo la construcción de las ideas son un hacer colectivo.

Uno de estos métodos es el conocido cifrado RSA, que debe su nombre a Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, que en 1977 publicaron, de nuevo inspirados en trabajos anteriores, este diseño. Con este método deberemos trabajar la parte que nos falta de ver: el conjunto $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. A diferencia de los anteriores, la complejidad de los resultados matemáticos que lo sustentan [13] nos obligarán a presentar los resultados, no a emular su descubrimiento, pero sobre todo nos permitirá trabajar su implementación y uso en diferentes herramientas informáticas, más especializadas en el cálculo matemático. Al comenzar a trabajar con una hoja de cálculo, como hasta ahora era posible, comprobaremos cómo nos dará errores debido a la capacidad de la hoja y deberemos pasar a otra herramienta como, por ejemplo, SAGE o Máxima [14].

Cifrado RSA

Se toman p y q dos números primos. Estos números son los números RSA.
Hacemos $n = p \cdot q$. Sabemos que $\phi(n) = (p-1)\cdot(q-1)$.
Tomamos un número e tal que $1 < e < \phi(n)$ $\text{mcd}(\phi(n), e) = 1$.
Clave pública: (n, e).
Clave privada: d tal que $d \equiv e^{-1} \pmod{\phi(n)}$.
Cualquier persona utiliza la clave pública (n, e) para encriptar un mensaje m, haciendo $M = m^e \bmod n$.
La persona receptora del mensaje lo desencripta haciendo $M^d \pmod n$.

p = 7 y q = 5; (35, 5)

0	32	0	1	0	17	15	24
0	3E+07	0	1	0	1419857	8E+05	8E+06
0	2	0	1	0	12	15	19
A	**C**	**A**	**B**	**A**	**M**	**O**	**S**

Figura 10

Esta propuesta de uso de los métodos César, Vigenère y RSA como hilo conductor de esta parte de la asignatura, se basa tan sólo en la apreciación subjetiva de la facilidad de los dos primeros y en la posibilidad de, a partir de

ellos, trabajar los saberes básicos que nos indica el curriculum. En la bibliografía se pueden encontrar muchos más métodos, que pueden ser igualmente utilizados. Elegir uno u otro, dependerá de los gustos de cada cual y muchos pueden servir al objetivo perseguido. Lo que me parece más importante,y es lo que intento proponer, es que se utilicen los métodos para descubrir los resultados matemáticos y no al revés. El cómo, será algo de deberemos construir, con un poco de tiempo, entre todas nosotras.

Para el resto de la asignatura ya se está trabajando en posibles materiales, que espero que podáis encontrar en la misma *classroom*, con un poco de tiempo. En este propósito, Antonio Oller ha dado un curso en el CP Juan de Lanuza, cuyos materiales, que os recomiendo fervientemente y que podéis encontrar en este enlace.

El autor pertenece al Grupo de Investigación en Educación Matemática S60_23R financiado por el Gobierno de Aragón.

Referencias bibliográficas

Diffie, W., y M. Hellman (1976), «News Direcctions in Cryptography», *IEEE New Transactions on Information Theory*, Vol. IT-22, n.º 22, 644-654.

Gómez, J. V. (2019), *La criptografía. El arte de guardar secretos,* EMSE EDAPP, SL y Prisanoticas Colecciones.

González, M. I. (2018), *Las matemáticas de la criptología. Secretos demostrables y demostraciones secretas*, Los libros de la Catarata.

Hernandez, L. (2016), *La criptografía,* Los libros de la Catarata.

Meavilla, V. (2016), *Las matemáticas en la guerra. Mensajes cifrados, artillería y otras aplicaciones de las matemáticas en la historia bélica*, Editorial Guadalmazán.

Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad de Aragón.

Quirantes, A. (2012), *Cuando la criptografía falla*, Versión Kindle.

Singh, S. (2000), *Los códigos secretos. El arte y la ciencia de la criptografía, desde el antiguo Egipto a la era de Internet*, Editorial Debate.

Tarantilla, C. (2018), *CR1PTØGRAFÍA. Los lenguajes secretos a lo largo de la Historia*, Editorial Guadalmazán.

1 Este artículo recoge la propuesta presentada en el Taller del mismo nombre, desarrollado en la V JEMA (10 y 11 de marzo de 2023). Los materiales utilizados para su desarrollo, adaptados y estructurados para el aula, se pueden encontrar en la *classroom* de código: y4l2zxr o con el enlace: <https://classroom.google.com/c/NjMzMzA4NDc0MjA3?cjc=y4l2zxr>.

2 Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad de Aragón. En su Capítulo II: Ordenación del currículo, artículo 11: Distribución de las materias en la Educación Secundaria Obligatoria, punto 5. c). correspondiente al cuarto curso de la ESO.

3 El primer tercio de la asignatura se desarrolla en la competencia específica CE.MTD.1. La otra parte a la que he hecho referencia corresponde a la competencia específica CE.MTD.4.

4 Hay una hecha para todos los métodos en la *classroom*.

5. Por suerte tenemos la «Ñ» y por tanto trabajaremos en módulo 27, un número con muchos menos divisores que 26.

6 Por cierto, métodos mucho más prácticos para calcular el máximo común divisor que el que mayoritariamente explicamos en el aula y que en muchas ocasiones se deben explicar al llegar a las facultades.

7 Está hecho en los materiales de la *classroom*.

8 Otro interesante para estudiar el Método Hill, basado en el producto de matrices. Se puede encontrar más información en la bibliografía y en la *classroom*.

9 Estudiar en cada idioma la frecuencia de cada letra y utilizarlo para desencriptar los mensajes.

10 Se puede encontrar una mayor explicación del método en la bibliografía y en la *classroom*.

11 En la hoja de cálculo de la *classroom* está implementado este método.

12 Se puede encontrar bastante material en la bibliografía y en la *classroom*.

13 Unidades y divisores de 0; función φ de Euler; pequeño teorema de Fermat y el teorema de Euler.

14 Hay material desarrollado en *classroom* con SAGE. Se puede encontrar mucho más en: <http://matematicas.uam.es/~pablo.angulo/doc/laboratorio/b6RSA.html>.

Geometría práctica

por
Ricardo Alonso Liarte
(IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Ramón Mateo Lozano nació el 31 de agosto de 1783 en Monreal del Campo, Teruel. Con 20 años obtuvo el grado de Bachiller en Cánones y continuó su formación, en este caso en las áreas de las matemáticas, arquitectura e ingeniería, alcanzando en 1808 el grado de subteniente de ingenieros. Inmerso en la guerra de la Independencia, y formando parte del Ejército Regular de Aragón, destacó en la reconstrucción y defensa de distintos enclaves de la ciudad de Zaragoza durante el segundo sitio, destacando la que mantuvo del convento de Santa Mónica, lo que le granjeó el apodo de «ingeniero de Santa Mónica». Apresado al finalizar el sitio, se escapó durante el traslado y huyó a Reus desde donde continuó colaborando con el ejército en distintos frentes. Vuelto a apresar, durante su encierro se dedicó a enseñar matemáticas y fortificación a sus compañeros de cautiverio.

En 1816 la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País lo designa como profesor de matemáticas, labor que desempeña de forma grata hasta que en 1822 se reincorpora al ejército. Un año más tarde es nombrado profesor del Colegio General Militar en Segovia hasta 1829. Es allí donde compila la obra que se menciona más adelante, un tratado de topografía escrito como texto para la asignatura que impartía en el citado colegio.

Falleció en Zaragoza, el 26 de mayo de 1840 a consecuencia de un accidente mientras paseaba por la ronda de la ciudad. Su hija, años más tarde, trasladó los restos de Ramón Mateo al panteón familiar de su localidad natal.

Dejó dos publicaciones: *Memoria sobre la importancia de la plaza de Jaca, con el proyecto de las obras necesarias para ponerla en buen estado de defensa* y *Geometría práctica*, un tratado de topografía por cuyos méritos se le libró certificación muy honorífica.

Geometría practica

Se trata de un manual manuscrito, fechado en 1826, que se encuentra depositado en la biblioteca Central Militar, en Madrid, y accesible en este enlace. El ejemplar que se conserva fue un regalo de la familia de un militar a la biblioteca de la Academia de Ingenieros de Segovia. En la primera página consta: «Tratado de Geometría practica arreglado para los Caballeros Cadetes del Real Colegio General Militar. Por su Profesor el Capitán del Real Cuerpo de Yngenieros D. Ramón Mateo. Segovia. Año 1826.»

En su introducción dice:

> La Geometría practica no es otra cosa que la aplicación de los principios de la Geometría especulativa y de la Trigonometría plana a la determinación de las dimensiones de la extensión, considerándola sobre los mismos cuerpos, o sobre el terreno. Sabemos que las dimensiones de la extensión se consideran como líneas, como superficies o como cuerpos; por consiguiente la Geometría práctica determinará estas dimensiones sobre cualquier cuerpo o sobre cualquier terreno, en todos los casos, cuya resolución dependa de los principios establecidos en la Geometría especulativa, y en la trigonometría plana.

Luego habla de la necesidad de utilizar instrumentos sobre el terreno, que se describirán a lo largo del manual, del mismo modo que sobre el papel se usan la regla y el compás.

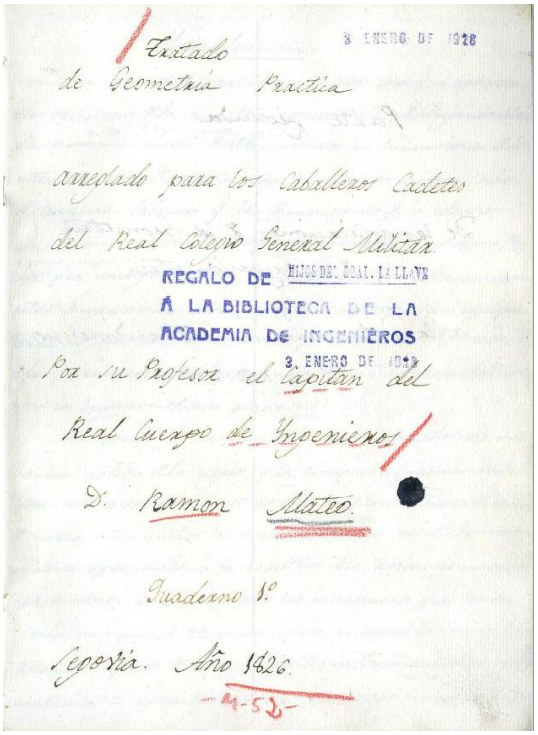

Tratado
de Geometría Practica
arreglado para los Caballeros Cadetes
del Real Colegio General Militar
REGALO DE HIJOS DEL GRAL. LA LLAVE
Á LA BIBLIOTECA DE LA
ACADEMIA DE INGENIEROS
3. ENERO DE 1928
Por su Profesor el Capitan del
Real Cuerpo de Yngenieros
D. Ramon Mateo.
Cuaderno 1.º
Segovia. Año 1826.
M-52

Figura 1

Consta de dos partes. La primera dedicada a las líneas y la segunda a las superficies.

Respecto a las líneas el autor diferencia entre su trazado y su medición, y así estructura esta parte del manual. Se detallan las distintas posibilidades con las que nos podemos encontrar en el trazado y medición de líneas sobre un terreno: líneas enteramente accesibles, solo accesibles en los extremos o inaccesibles. Describe lo que llama métodos particulares para la medición de líneas: utilizando la velocidad del sonido o un barómetro, así como la longitud de la sombra o la reflexión en un espejo. Estos últimos siguen siendo propuestos en nuestras aulas y representan una buena práctica de geometría práctica en el patio.

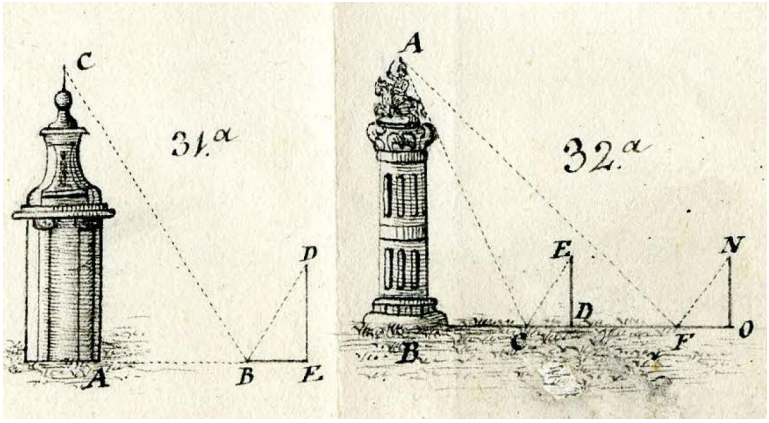


Figura 2

La segunda parte está dedicada al levantamiento de planos: con cuerdas, trigonométricamente, con la plancheta, con la brújula y con el cartabón. Termina el manual con las láminas que contienen las 64 figuras que ilustran los problemas y resoluciones planteados a lo largo del texto, algunas de las cuales se incluyen en este artículo.

Algunos casos prácticos

Las mediciones en el patio o el exterior del centro permiten hacer práctica la geometría que se muestra en las aulas, con sus ángulos, distancias y superficies ya medidas. Estar sobre el terreno obliga a plantearse al alumno qué mediciones necesita realizar y cómo llevarlas a cabo. No es necesario disponer de aparatos muy precisos y a veces pueden fabricarlos ellos mismos (cuadrantes, teodolitos básicos, clinómetros, báculos…), pero es muy interesante tenerlos en la mano y darles la función para la que han sido construidos.

De todas las propuestas que se muestran en este tratado de topografía extraemos tres sencillas prácticas que pueden realizarse en el patio de cualquier centro, que no requieren de material sofisticado y que pueden sorprender a nuestros alumnos, a veces, por la sencillez del procedimiento.

Las dos primeras se encuentran en el artículo 1.º «De la traza de las líneas»: el trazado de una paralela y una perpendicular a una recta por un punto dado. Corresponden a los problemas número 8 y número 10 del manual al que nos referimos. El tercer ejemplo pertenece a la lección 2.º: «De las líneas accesibles solo en sus extremos o en algunos otros puntos», y se corresponde con el número 23.

Problema 8

Señalada una línea *AB* y un punto *C* fuera de ella, tirar una paralela a la *AB* que pase por el punto *C*

Es evidente que abordar este problema sobre un papel con regla y escuadra o regla y compás no reviste una gran dificultad más allá de seguir el procedimiento junto con la habilidad y limpieza de quien lo ejecuta. La rea-

lidad, sobre el terreno, presenta dificultades que sobre el papel no existen. Una, el material e instrumental con el que resolver el problema y otra, la posibilidad o imposibilidad de acceso al punto exterior a la recta o a la misma recta, o a ambos: orografía del terreno, obstáculos, etc. Estos últimos casos se apoyan en la búsqueda de nuevos puntos que sean accesibles, la medición y traslación de ángulos y el uso de la trigonometría para la resolución de triángulos. Todo queda detallado en el manual. Corresponden estos casos a actividades para poner en práctica con alumnado que conozca la resolución de triángulos cualesquiera.

Sin embargo, vamos a comentar, por su sencillez, el caso en el que punto y recta son accesibles y que se puede llevar a cabo con cualquier curso. En esta situación se presentan dos soluciones: una con ángulos y otra utilizando nada más que una cuerda.

En el primer caso se propone tomar un punto *D* sobre la recta *AB*, medir el ángulo *CDA* y fomar con vértice en *C* el ángulo *DCE* de la misma amplitud que *CDA* (figura 3).

En el caso de la cuerda, se trata simplemente de formar un paralelogramo con una cuerda (en el texto se indica el uso de dos cuerdas pero puede hacerse con una sola).

> Tómese cualquier punto de la *AB*, y mídase una cualquier distancia *DA*, v.g. 6 varas; mídase la distancia *AC* y sea v.g. 5 varas; tomando con dos cuerdas las distancias *AC*, *AD* y asegurando un extremo de cada una en los puntos *C* y *D*, juntense los otros dos extremos y poniéndolas tirante señálese el punto *E* donde concurre su unión: La recta *CE* será paralela a la *AB*.

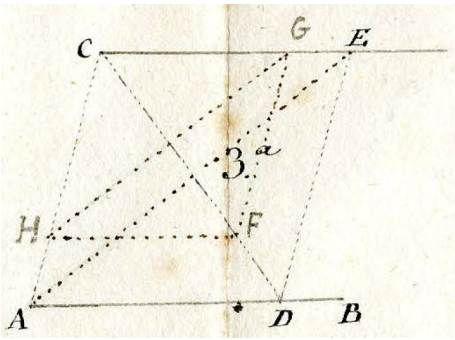


Figura 3

A la hora de ponerlo en práctica, con una sola cuerda, se coloca un extremo en *C*, se fija la cuerda también en *A* y el otro extremo, sobre la línea nos indica el punto *D*. A partir de ese momento, los alumnos que están en *C* y *D* intercambian sus posiciones y por último quien está en *A*, sin soltar la cuerda, se coloca al otro lado del segmento imaginario *CD* manteniendo la tirantez de la cuerda en sus dos partes. Llegará así a determinar el punto *E* necesario para trazar la recta *CE* paralela a la *AB*. Vemos aquí una aplicación práctica de la simetría central.

Problema10

Desde un punto dado *A*, tirar una perpendicular a una línea dada *BC*

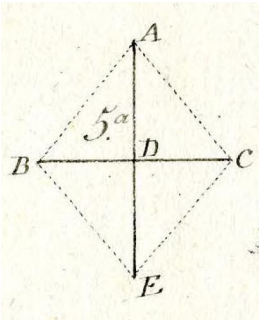


Figura 4

De nuevo nos encontramos ante un problema de trazado de rectas, que se puede abordar en el patio en una situación más real que sobre el papel. La solución que se propone utiliza de nuevo una cuerda. Tomar una cuerda y doblarla por la mitad. Colocar el punto medio en *A* y llevar los dos extremos de la cuerda sobre la recta *BC* de forma que quede tirante la cuerda. En ese momento fijar los extremos y desplazar el punto medio al otro lado de la línea *BC* hasta que la cuerda vuelva a estar tirante. Ese punto *E* unido a *A* nos dará la perpendicular buscada. En este caso es la simetría axial la que está presente en la resolución del problema.

¿Qué ocurriría si la línea *BC* está interrumpida por un obstáculo y no se puede utilizar el método anterior? El autor propone la solución:

> Si la perpendicular se hubiese de tirar, fig 6, al extremo *B* de la línea *BC*, tiraríamos la recta *AC*, dividiéndola en medio en el punto *D*; desde este punto con la distancia *AD* señalaríamos el punto *B* en la *BC* y tirando la *AB* esta será la perpendicular pedida.

Vemos pues en este método la utilización del circuncentro de un triángulo rectángulo para encontrar, con una simple cuerda el pie de la perpendicular buscada.

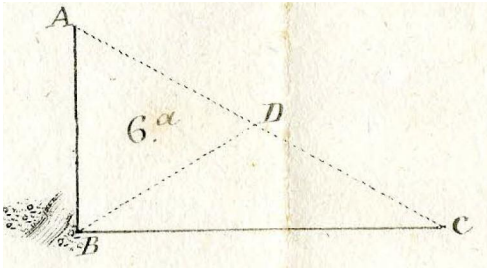


Figura 5

Problema 23

Determinar la distancia horizontal *AB* accesible solo en el extremo *B*

Para medir la distancia entre dos puntos cuando solo uno de ellos es accesible se proponen varios métodos que van desde el uso de la proporcionalidad a la trigonometría. Veámoslos:

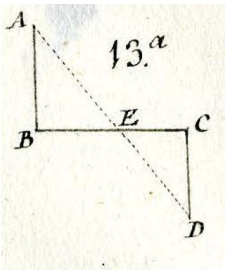


Figura 6

En el punto *B* tírese la recta *BC* perpendicular a la *AB*, y sobre ella en el punto *C* levántese la perpendicular *CD*; tírese una visual desde *D* a *A*; señálese en la *BC* el punto *E* en el que dicha visual la corta y mídanse las distancias *EC*, *CD* y *EB*; los triángulos semejantes *ABE*, *ECD* nos darán *EC*:*CD*::*EB*:*AB*»

La construcción sobre el terreno de dos triángulos rectángulos semejantes implica el trazado de la perpendicular a un segmento por uno de sus extremos, asunto este que está detallado en el problema 9 del manual y en el que propone usar medidas de 3, 4 y 5 varas (la terna pitagórica o su versión de la cuerda de 12 nudos).

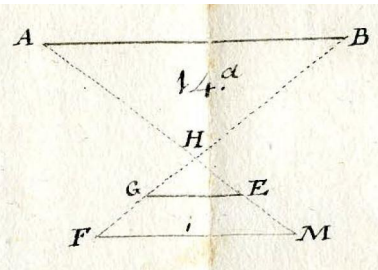


Figura 7

«Colóquese un piquete en un punto cualquiera *H*, y en la dirección *BH* fíjese otro piquete en *F*, de modo que *HF*=*HB*; fórmese en el punto *F* un ángulo *HFM*=*ABH*; búsquese en la recta *FM* un punto *M* que se alinee con los *H* y *A*, y midiendo la distancia *FM* será el valor de la distancia *AB* que buscamos porque los triángulos semejantes *HFM*, *HAB* nos dan *HF*:*AB*::*FM*:*AB*; pero *HF*=*HB*; luego *FM*=*AB*.
Si hubiéramos tomado *HG* igual al tercio, cuarto u otra cualquier parte de *HB*, practicando las mismas operaciones resultaría *GE* igual al tercio, cuarto de *AB*.

En esta solución la construcción del triángulo semejante al *ABH* requiere de mediciones precisas de ángulos por lo que el aparato con el que se realicen las mediciones angulares deberá estar bien ajustado y realizar un uso cuidadoso en las lecturas.

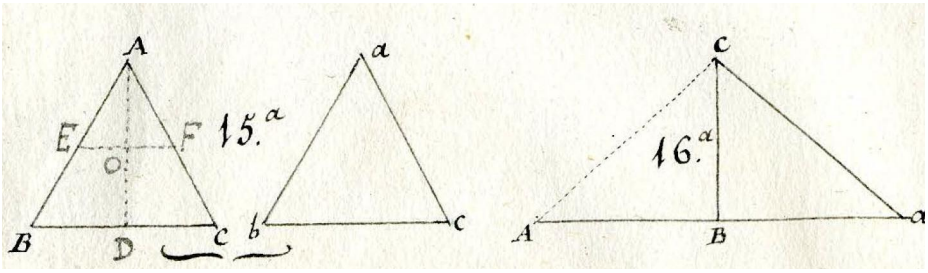


Figura 8

Si el terreno se presentase horizontal, podríamos medir la distancia *AB* fig 15.ª, formando en el mismo terreno el triángulo *abc* totalmente igual al triángulo *ABC*; lo que se logrará tomando *bc*=*BC* y haciendo los ángulos en *b* y *c* iguales a los en *B* y *C*; hecho lo cual midiendo ab se tendrá el valor de *AB*.
Esta misma operación podrá hacerse sobre *BC*, fig 16.ª, cuando el terreno lo permita, formando los ángulos *BCa*, *CBa* iguales a los *BCA*, *CBA*, y entonces *Ba* será igual a *BA*.

Para la construcción de la réplica a tamaño original (o incluso a escala) del triángulo formado por los puntos dados y un tercero elegido arbitrariamente sobre el terreno requiere de nuevo precisión en la medida de los ángulos y su traslación al nuevo triángulo. Una vez construido ya simplemente se trata de medir la distancia entre dos puntos accesibles y no requiere ningún tipo de cálculo.

El autor concluye las propuestas de resolución del problema con una llamada a la trigonometría:

En las prácticas anteriores solo nos hemos valido de cuerdas y piquetes y de la semejanza de los triángulos: ahora hallaremos la misma distancia con el auxilio de la trigonometría. Para esto en el punto *B* accesible, fig 14.ª, tómese con un instrumento el ángulo *ABH*, y en el punto *H*, tómese también el ángulo *AHB* y mídase la distancia *HB*. Con estos datos conoceremos en el triángulo *AHB*, dos ángulos y un lado, y resolviéndolo hallaremos el lado AB que buscamos.

La posibilidad de aplicar varios procedimientos a la medición de la misma distancia permite llevar a cabo posteriormente un análisis de los resultados, valorando cuál es más preciso, cuál convendría más según las circunstancias orográficas, la corrección de errores, etc. Además se puede tener una medida bastante real pues se dispone de herramientas tecnológicas como el láser o *apps* que permiten medir distancias sobre mapas.

Estos tres ejemplos solo pretenden ser una pequeña muestra de los problemas que se plantean en este manual y que se pueden llevar de forma fácil al aula, o mejor dicho, al patio. Hay mucha distancia entre un dato que nos dan en el texto de un problema y un dato real que para conseguirlo requiere usar correctamente un instrumento, ser preciso, manejar el error, etc. Este tipo de actividades prácticas nos permiten medirla.

Durante el curso 2021-2022 se llevó a cabo en el instituto un proyecto «En torno a los tiempos de Goya», y de ahí surgió el interés por investigar un poco sobre el trabajo de este monrealero y nos encontramos con la grata sorpresa de que sus propuestas podemos plantearlas en la actualidad con nuestros alumnos. Esta comunicación es fruto de ese trabajo y para que sirva de recuerdo y reconocimiento a la labor docente de Ramón Mateo Lozano.

Referencias bibliográficas

Biblioteca Central Militar — Ubicación: DE — Signatura: MS-103 — N.º de registro: 10748 — Código de barras: 2032109.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza), Daniel Sierra Ruiz (CPI El Espartidero, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Julio de 2023
ISSN: 2386-8821e