VJEMA#14

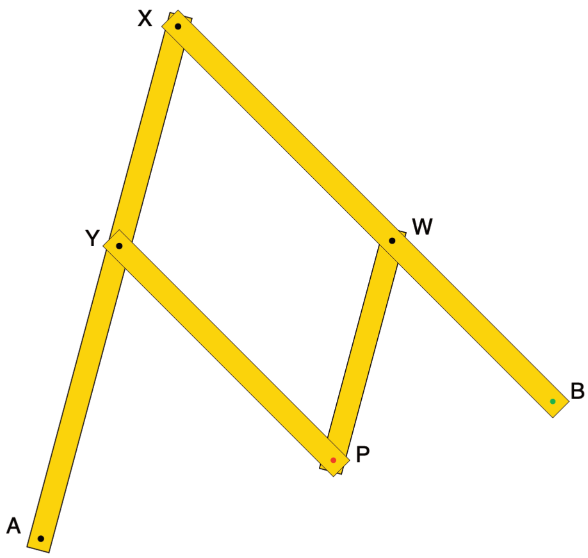
El pantógrafo

por

Álvaro Gutiérrez Ruiz

(CPEPA Marco Valerio Marcial, Calatayud, Zaragoza)

El pantógrafo es un mecanismo articulado formado por cuatro varillas conectadas que forman un paralelogramo. Uno de los puntos extremos (A) de una varilla mayor es fijo (se denomina *pivote*), y los demás pueden moverse libremente. En el punto de articulación de las varillas cortas (P) se coloca un lapicero guía, y en el extremo de la otra varilla larga (B) se coloca otro lapicero o instrumento de dibujo.



Las varillas largas son iguales ($AX = XB$), y las cortas se colocan de manera que $AY = YP$ y $PW = WB$, y de forma que el cuadrilátero $XYPW$ sea un paralelogramo.

Los triángulos AYP y AXB son isósceles y semejantes; ya que los ángulos $\angle AYP$ y $\angle AXB$ son iguales por ser ángulos alternos internos en un paralelogramo y ser isósceles (criterio Lado-Ángulo-Lado); en particular los ángulos $\angle YAP$ y $\angle XAP$ también son iguales y en consecuencia los puntos A, P y B están siempre alineados.

En cualquier posición del mecanismo, el punto A es fijo, y los puntos P y B describen figuras homotéticas una de otra de razón $k = AX / PY$, la razón de semejanza.

Si colocamos una guía en el punto P, y un lapicero en el punto B; este último describirá una figura ampliada de la que describe el punto P con razón de aumento k.

Si, por el contrario, colocamos la guía en el punto B, y el lapicero en el punto P; el punto P describirá una figura reducida de la que describe el punto B, con razón de reducción $1/k$.

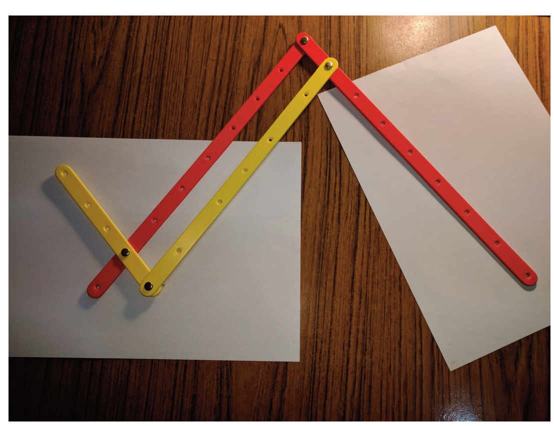
También podría dibujarse una figura de homotecia negativa; para ello bastaría dejar fijo el punto P; con lo cual los puntos A y B describirían figuras homotéticas una de otra de razón $-k$ o $-1/k$.

El pantógrafo fue inventado por el físico, matemático y astrónomo alemán Christofer Scheiner (1575-1650), que en 1603 jugando con unas varillas de madera y unos clavos se dio cuenta de la homotecia.

En la actualidad se sigue utilizando en diversos ámbitos: en mecanismos tales como el gato hidráulico, en la construcción de edificios, en la confección de embalajes, en óptica, en talleres de joyería o como instrumento de dibujo.

Dentro del currículum de secundaria se pueden trabajar diversos aspectos en las unidades de geometría:

— Semejanza de triángulos.
— Teorema de Tales y propiedades de los paralelogramos.
— Semejanza de polígonos.
— Escalas de figuras en general.

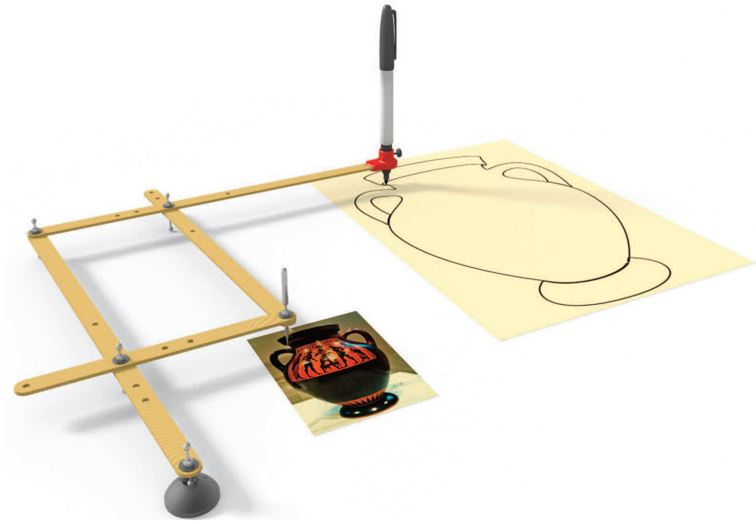


No es difícil que los alumnos puedan construir su propio pantógrafo usando láminas de plástico.

Pueden construirse pantógrafos caseros con láminas de aluminio o de madera e incluso sirviéndose de láminas de cartón como se explica en el siguiente vídeo:

<https://www.youtube.com/watch?v=7Ddk_HAgtUw>.

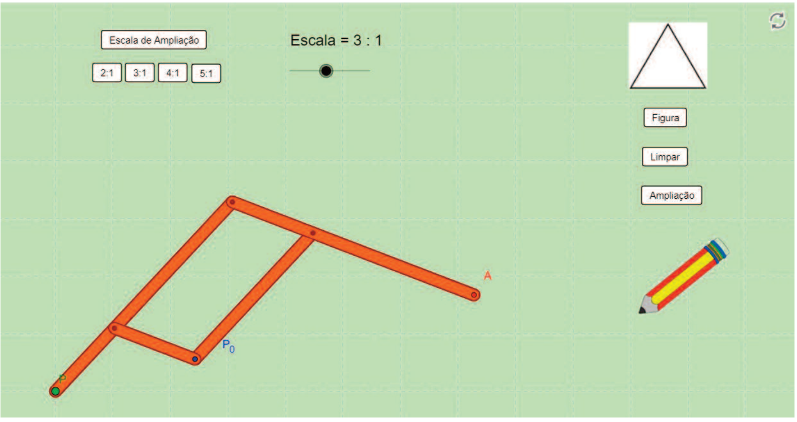
En definitiva, este mecanismo permite reproducir dibujos originales a escala, de forma natural y manteniendo las proporciones.



También puede utilizarse GeoGebra para practicar y realizar figuras a escala utilizando pantógrafos, como los que se pueden encontrar en la página de recursos de la aplicación. Veamos algunos ejemplos.

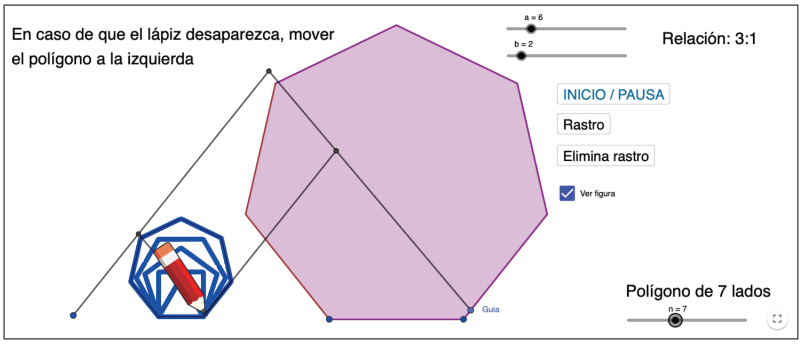
Pantógrafo de Patricia Bittencourt

En este caso se pueden hacer ampliaciones y reducciones de diversas figuras que pueden elegirse o hacer nuestro propio diseño.



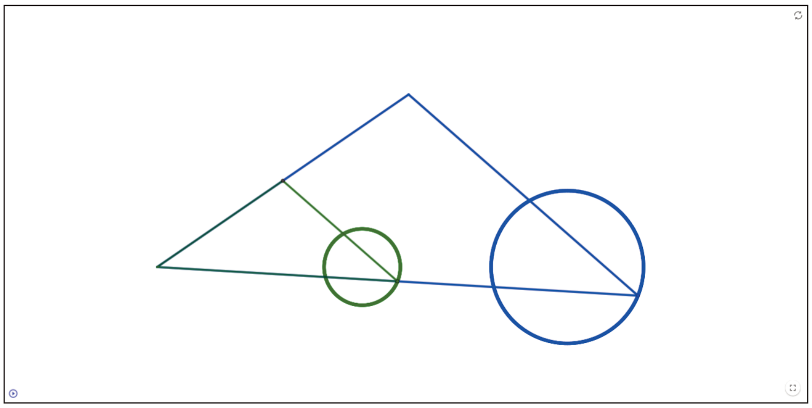
Pantógrafo de Saul Chávez

Con este *applet* se pueden reproducir polígonos regulares a diferentes escalas.



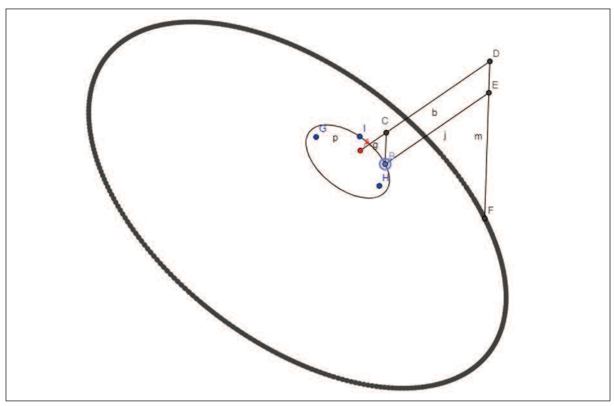
Pantógrafo de Wenes Gomes Aquino

Este otro permite dibujar circunferencias homotéticas.



Pantógrafo de Leandro Amorín Da Silva

Y con este último se pueden reproducir elipses o cualquier cónica a partir de una dada.



El Mecanismo de inversión de Peaucellier

Otro mecanismo articulado es el que permite visualizar la trasformación geométrica llamada *inversión* respecto de una circunferencia.

La inversión es una trasformación geométrica que lleva todos los puntos del interior (salvo el centro) de una circunferencia de radio r al exterior y, recíprocamente, los del exterior al interior. Los puntos de la circunferencia los deja puntualmente fijos.

Concretamente, a cada punto P del plano, lo lleva a un punto P' en la semirrecta OP de forma que se verifica que $OP \cdot OP' = r^2$.

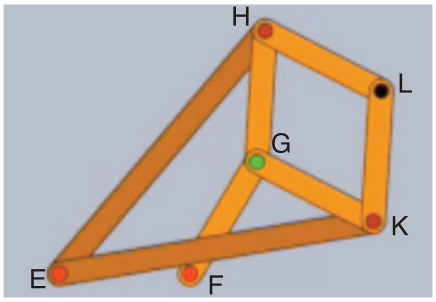
La inversión tiene la particularidad de que trasforma las circunferencias que pasan por el centro de inversión en rectas que no pasan por el centro de inversión, y trasforma las circunferencias que no pasan por el centro de inversión en otras circunferencias homotéticas a las anteriores.

En la última mitad del siglo XIX, se planteaba el problema geométrico de descubrir un mecanismo articulado para construir una línea recta.

Finalmente, en 1864, un oficial ingeniero de la armada francesa Charles-Nicola Peaucellier (1832-1913) halló una solución, que fue anunciado por su compañero A. Mannheim en la reunión de la Sociedad Filomática de Paris en 1867. Pero se prestó poca atención a este anuncio hasta que Lipkin, un joven estudiante del célebre matemático ruso Chevyshev (1821-1894) descubrió él mismo el mecanismo. A pesar de que el propio Chevyshev había tratado de demostrar la imposibilidad de dicho mecanismo.

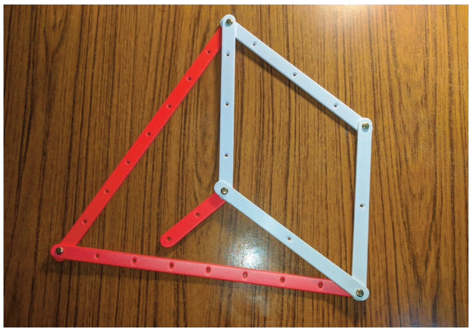
Lipkin recibió un importante premio del gobierno ruso, después de lo cual el mérito de Peaucellier fue también reconocido y también se le otorgó el gran premio mecánico del Instituto de Francia. Por todo ello el mecanismo suele ser conocido como mecanismo de inversión de Peaucellier-Napkin.

El mecanismo de Peaucellier-Napkin está formado por 7 barras: 2 barras largas formando un triángulo isósceles unidas en el centro de inversión, 4 barras formando un rombo articulado unido a los extremos de las barras largas; una última barra unida a uno de los vértices del rombo, dicho vértice va a recorrer la circunferencia que se desea invertir y que pasa por el centro de inversión.



Se prueba que el producto $EG \cdot EL$ es una cantidad fija, $EK^2 - GK^2$, que solo depende de las longitudes de las barras utilizadas. Por lo tanto, mientras el punto verde G recorre una circunferencia que pasa por E, el punto L debe recorrer una recta.

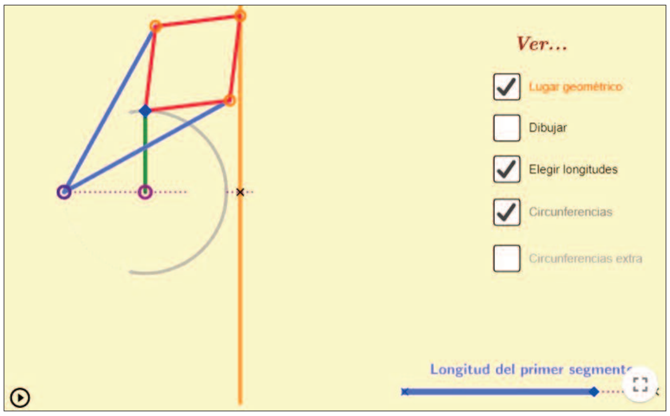
Puede construirse un mecanismo de Peaucellier con láminas de material escolar como en la siguiente figura:



También pueden utilizarse recursos de GeoGebra para visualizar mecanismos de Peaucellier ya realizados como los ejemplos que se presentan a continuación.

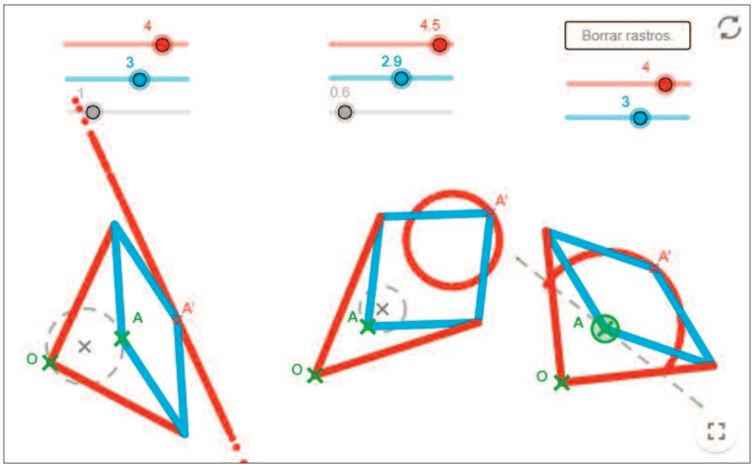
Mecanismo de Peaucellier de Javier Cayetano Rodríguez

Con este *applet* podemos visualizar la transformación de movimientos circulares en lineales.



Mecanismo de Peaucellier de Luis Pérez

De la misma forma que con este otro.



Nótese que el mecanismo, en la segunda figura trasforma una circunferencia que no pasa por el centro de inversión en otra circunferencia homotética.

Referencias bibliográficas

Eves, H. (1969), *Estudio de las Geometrías*, Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana. U.T.E.H.A.
Puig, P. (1986), *Curso de Geometría Métrica I*, Euler Editorial S.A.