

# Teoría de Grafos, una propuesta para la asignatura Matemáticas para la toma de decisiones

por

CARMEN JULVE-TIESTOS

(Centro de profesorado Juan de Lanuza, Universidad de Zaragoza)

Desde la entrada en vigor de la LOMLOE, se oferta en 4.º de ESO la asignatura optativa Matemáticas para la toma de decisiones en los centros de la Comunidad Autónoma de Aragón. Se trata de una asignatura cuyos saberes básicos se estructuran en torno a tres bloques: Aritmética modular y criptografía, Teoría de grafos y Teoría de juegos. En este artículo presentamos una propuesta didáctica para el segundo bloque, Teoría de grafos. Primero, describiremos brevemente los fundamentos de enseñanza y aprendizaje que la guían y que están alineados con las recomendaciones metodológicas y el desarrollo de las competencias específicas de nuestro currículo.

Si bien la inclusión de la teoría de grafos en particular o de la matemática discreta en general en el currículo de asignaturas de secundaria en España está dando aún sus primeros pasos, hay experiencias en otros países como Italia (Ferrarello y Mammana, 2018) y la literatura científica ya justifica su inclusión en relación con otras áreas: Hart y Martin (2018) consideran la matemática discreta particularmente adecuada para aplicaciones tecnológicas o informáticas. Estos mismos investigadores dan otro motivo para incluir estos contenidos, como «revitalizador» de las matemáticas escolares, en tanto que ofrecen un nuevo comienzo al alumnado. Por una parte atraen a aquellos que arrastran un cierto fracaso escolar con las matemáticas «tradicionales» ya que en particular la teoría de grafos no requiere de grandes conocimientos previos, y por otro lado estimulan a aquellos más aventajados a los que ofrecen nuevos retos y desafíos. Tenemos, pues, a nuestra disposición los ingredientes necesarios para cocinar una propuesta de enseñanza en la que se ofrezcan problemas de suelo bajo y techo alto a nuestros estudiantes.

Nuestro currículo incluye dos competencias relacionadas directa (CE.MTD.2) o indirectamente (CE.MTD.4) con la teoría de grafos. En ellas se busca el desarrollo de la modelización de problemas reales, cotidianos o tecnológicos, y la comunicación de sus soluciones junto con el desarrollo de herramientas digitales para explorar, conjeturar y comprobar propiedades y el desarrollo de algoritmos matemáticos sencillos para la resolución de problemas. Además, el currículo hace sugerencias metodológicas que adoptamos como propias en nuestra propuesta: la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas, primero resolver verdaderos problemas y después institucionalizar; el fomento de la comunicación oral y escrita de los resultados obtenidos y, finalmente, el desarrollo de la competencia argumentativa en nuestro alumnado a través de la explicación de argumentos, bien sean basados en ejemplos o bien en pruebas más o menos formales.

Respecto de los contenidos, la propuesta que se presenta más adelante ha seguido los saberes básicos incluidos en el currículo oficial de la asignatura y que vemos en la tabla 1.

<i>B1. Definición, conceptos y propiedades básicas</i>
Definición intuitiva de grafo. Vértices y aristas. Representaciones pictóricas. Isomorfismo de grafos. Grafos dirigidos. Grafos ponderados. Subgrafos. Ciclos y caminos. Conexión. Grafos bipartitos. Planaridad y coloreabilidad.
<i>B2. Tipos y familias de grafos</i>
Grafos completos. Grafos bipartitos completos. Árboles. Grafos eulerianos y hamiltonianos.
<i>B3. Algoritmos de grafos</i>
El algoritmo voraz de coloración. El algoritmo de Fleury. El algoritmo de Dijkstra.

Tabla 1. Concreción de los saberes básicos de teoría de grafos en el currículo de la asignatura

A la hora de diseñar esta propuesta de enseñanza nos hemos basado en las pautas dadas por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) a través de sus «Navigations books on discrete mathematics»: *Navigating Through Discrete Mathematics in Prekindergarten to Grade 5* y *Navigating Through Discrete Mathematics in Grades 6 to 12*.

- Resaltar el gran potencial de la teoría de grafos para modelizar situaciones cotidianas y resolverlas de la forma óptima. Planificación de rutas eficientes, resolución de incompatibilidades...
- Utilizar fundamentalmente la representación pictórica (puntos y rayas) de los grafos en educación secundaria. Esta representación es más intuitiva, aunque también más informal, pero permite un aprendizaje más completo.
- Incidir en que los grafos representan relaciones entre elementos. Estas relaciones pueden ser de tipo concreto como en el caso de mapas o abstractas como «conflicto» o «prerrequisito».

En este sentido, consideramos que nuestro alumnado debería:

- Utilizar grafos para modelar y resolver una variedad de problemas relacionados con trayectorias, circuitos, relaciones entre un número finito de objetos.
- Comprender y aplicar propiedades de los grafos.
- Idear, describir y analizar algoritmos para ayudar a resolver problemas relacionados con los grafos.
- Utilizar grafos para entender y resolver problemas de optimización donde el objetivo es encontrar la mejor solución, por ejemplo, la ruta más corta o la estrategia más eficiente.

El NCTM (2000) recomienda el trabajo sobre tres campos de problemas: problemas de caminos y ciclos óptimos, problemas de coloración óptima de grafos y problemas de redes de expansión óptima. Estos campos de problemas se presentan en la tabla 2 junto con las aplicaciones de cada uno y los saberes básicos con los que se relacionan. En nuestra propuesta se trabajan los problemas sobre caminos y ciclos óptimos y los de coloración óptima de grafos.

PROBLEMAS DE CAMINOS Y CICLOS ÓPTIMOS

SABERES BÁSICOS	PROBLEMA A RESOLVER	APLICACIONES
Caminos eulerianos	Encontrar una ruta a través de un grafo que utilice cada arista, todas, exactamente una vez	Determinar rutas de quitanieves
Caminos hamiltonianos	Encontrar una ruta a través de un grafo que visite cada vértice exactamente una vez	Clasificar a los jugadores del torneo
Camino más corto	Encontrar el camino más corto entre dos vértices	Medir el grado de influencia entre las personas de un grupo. Distancia o grados de separación entre personas en RRSS
El problema del comerciante viajero TSP	Encuentra un ciclo a través de un grafo que visite todos los vértices, donde el inicio sea igual al final, y tenga un peso total mínimo	Dada una lista de ciudades y las distancias entre cada par de ellas, ¿cuál es la ruta más corta posible que visita cada ciudad exactamente una vez y al finalizar regresa a la ciudad origen?
El problema del camino mínimo	Encuentra el camino de peso mínimo entre dos vértices de un grafo	Dada una ruta de carreteras y las distancias entre ellas, encontrar el camino más corto entre dos ciudades dadas

PROBLEMAS DE COLORACIÓN ÓPTIMA DE GRAFOS

SABERES BÁSICOS	PROBLEMA A RESOLVER	APLICACIONES
Coloración de vértices.	Asignar colores diferentes a los vértices adyacentes, usando la menor cantidad de colores posible	Coloración de mapas. Evitar conflictos, por ejemplo, horarios de reuniones o almacenamiento químico

PROBLEMAS DE REDES DE EXPANSIÓN ÓPTIMAS

SABERES BÁSICOS	PROBLEMA A RESOLVER	APLICACIONES
Redes de expansión óptimas	Encuentra una red dentro de un grafo que conecta todos los vértices, no tiene circuitos y tiene un peso total mínimo.	Crea una red informática o de carreteras óptima

Tabla 2. Campos de problemas propuestos de enseñanza

Respecto del aprendizaje, nos hemos basado en la adaptación del modelo de razonamiento de van Hiele a la teoría de grafos realizada por González y otros (2021). En este sentido, los autores hablan de cinco procesos en el aprendizaje de la teoría de grafos:

- *Reconocimiento*: identificación de grafos particulares, subgrafos, familias de grafos, así como propiedades locales y globales, además de las relaciones entre propiedades.
- *Uso de definiciones*: comprende el manejo de conceptos para resolver cualquier tarea propuesta en el contexto de la teoría de grafos, lo cual incluye la comprensión de propiedades, pasos de algoritmos.
- *Formulación de definiciones*: habilidad para describir y/o caracterizar nociones de teoría de grafos como propiedades, familias, etc.
- *Clasificación*: organizar grafos en familias de acuerdo a sus propiedades.
- *Demostración*: demostrar teoremas clásicos, equivalencia de definiciones, validez de algoritmos, entre otros tipos de resultados.

Estos procesos, al igual que en el modelo de Van Hiele original, se desarrollan en el tiempo a través de la adquisición de unos niveles de razonamiento:

- *Nivel visual*, en el que el alumnado percibe los grafos como un todo. Los grafos se reconocen por su apariencia visual, no por sus propiedades. Las definiciones se realizan por comparación con objetos geométricos cotidianos y sin lenguaje matemático. Las representaciones particulares condicionan el razonamiento en este nivel, llegando a considerar suficiente verificar la veracidad de una afirmación en uno o en unos pocos ejemplos específicos.
- *Nivel analítico*, en el que el alumnado distingue partes y propiedades de los grafos. Se reconocen propiedades locales y subgrafos, lo que permite abstraer la idea de grafo a las conexiones entre vértices, empezando a superar la representación gráfica concreta. La idea de definición está relacionada con dar una lista de propiedades, incluyendo habitualmente redundancias. Al no relacionar todavía estas propiedades, no se avanza en este nivel en cuanto al proceso de demostración.
- *Nivel preformal*, en el que el alumnado puede interrelacionar propiedades. Reconocen relaciones entre propiedades, por ejemplo, pueden determinar si un grafo es euleriano al verificar la paridad de sus vértices. Se entiende ya la idea de definición como lista de condiciones necesarias y suficientes, esforzándose por evitar redundancias y deficiencias. El alumnado comprende que los ejemplos particulares son insuficientes para demostrar una afirmación. Así, pueden producir demostraciones informales que requieren pocos pasos lógicos y/o se obtienen a partir de la observación de ejemplos genéricos o de la búsqueda de contraejemplos.
- *Nivel formal*, en el que los grafos se manejan como objetos matemáticos abstractos. El alumnado en este nivel reconoce los grafos como objetos matemáticos formales, puede deducir cualquiera de las definiciones equivalentes para el mismo concepto y puede elaborar demostraciones formales con varios pasos lógicos.

Si bien no tenemos datos de investigación al respecto, consideramos que el alumnado de 4.º de ESO empezaría en un nivel visual (dado que nunca han tenido contacto con la teoría de grafos) y realizarían una transición más o menos rápida al nivel analítico. Dadas las relaciones internas entre teoría de grafos y geometría, la transición entre ambos niveles estaría muy influenciada por el nivel de razonamiento geométrico que hubieran adquirido previamente.

Pasamos a ver, en las páginas siguientes, la estructura de cada una de las subunidades que componen la propuesta y los diferentes tipos de actividades que la desarrollan (tabla 3).

La propuesta completa, tanto la versión de profesor como la del alumnado puede descargarse desde esta [carpeta](#). Esta propuesta se ha registrado con el Depósito Legal Z 538-2024. Se puede utilizar libremente siempre que se haga referencia a su autora y no se obtenga rendimiento económico de ningún tipo.

Este trabajo se ha desarrollado parcialmente dentro del Grupo de Investigación en Educación Matemática S60\_23R de la Universidad de Zaragoza financiado por el Gobierno de Aragón así como parte de la labor de asesoría de formación de profesorado.



7. Supongamos que las 7 nuevas estaciones de radio que han solicitado permisos de transmisión están ubicadas como se muestra en la imagen. Un lado de cada cuadrado pequeño en la cuadrícula representa 100 Km. La Corporación de Radio y Televisión Española, S.A. desea asignar una frecuencia a cada estación para que ninguna interfiera con las demás. La CRTE también desea asignar el menor número posible de nuevas frecuencias teniendo en cuenta que estaciones que estén separadas más de 500 Km no interfieren entre sí. ¿Cuál es el número mínimo de frecuencias que se pueden asignar?

En el grafo los vértices son estaciones y están adyacentes si están a una distancia menor o igual de 500 Km, ya que entonces deberán tener distinta frecuencia (si decir distintos color en el grafo). Podemos ver que se necesitan tres colores para colorear el grafo. Eso quiere decir que se necesitan tres frecuencias de radio para que las estaciones que están dentro de 500 millas unas de otras reciban diferentes frecuencias.

8. Escribe un problema o situación que se modelice con el grafo  $K_4$ .

11. Dado un conjunto de enteros positivos  $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  definimos un grafo  $G(C)$  del siguiente modo:

- Un vértice para cada elemento de  $C$ .
- Dos vértices  $a_i$  y  $a_j$  están unidos si  $a_i$  o  $a_j$  divide a  $a_i + a_j$ .

Dibuja el grafo  $G(C)$  para los siguientes conjuntos:

- $\{1, 2, 3, 4, 5, 12, 21\}$
- $\{2, 8, 12, 24, 14, 7\}$

Busca (si es que es posible) conjuntos  $C$  de enteros de manera que su grafo sea:

- El grafo completo de 4 vértices.
- El grafo completo de 5 vértices.
- Un ciclo de 4 vértices.
- Un ciclo de 5 vértices.

**SOLUCIÓN**

a) El grafo completo de 4 vértices:  $\{p, p', p'', p'''\}$  siendo  $p$  un entero cualquiera.  
 b) El grafo completo de 5 vértices:  $\{p, p', p'', p''', p''''\}$  siendo  $p$  un entero cualquiera.  
 c) Un ciclo de 4 vértices:  $\{P, P', P'', P'''\}$  sin primas entre sí.

d) Un ciclo de 5 vértices. No es posible.

Tabla 3. Estructura de la subunidad 2.3, grafos planos, coloración de mapas y solución de incompatibilidades y de la subunidad 2.4, actividades para seguir practicando

## Referencias bibliográficas

FERRARELLO, D., y M. F. MAMMANA (2018), «Graph theory in primary, middle, and high school», en W. Hart y J. Sandefur (Eds.), *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research*, Springer, 183–200, <[https://doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4_12)>.

GONZÁLEZ, A., I. GALLEGOS-SÁNCHEZ, J. M. GAVILÁN-IZQUIERDO y M. L. PUERTAS (2021), «Characterizing levels of reasoning in graph theory», *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(8), em1990.

HART, E. W. (2008), «Discrete mathematics for all», *LATM Journal*, Vol.4, Num. 2. Recuperado de <[https://www.lamath.org/journal/vol4no2/Guest\\_Editorial.pdf](https://www.lamath.org/journal/vol4no2/Guest_Editorial.pdf)>.

HART, E. W., y W. G. MARTIN (2018), «Discrete mathematics is essential mathematics in a 21st century school curriculum», en E. W. Hart y J. Sandefur (Eds.), *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research*, Springer International Publishing, 3–19, <[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4\\_1](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4_1)>.

NCTM (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, Virginia.