Situación de aprendizaje para introducir el álgebra desde la geometría en 1.º de ESO

por
Almudena Agudo Carnicer y Pablo Mateo Segura
(Colegio Sagrado Corazón de Jesús, Zaragoza; IES El Portillo, Zaragoza)

Esta propuesta se sitúa en la enseñanza a través de la resolución de problemas y toma como referente el nuevo currículo de Matemáticas en Aragón para los dos primeros cursos de la ESO (LOMLOE).

El currículo de Matemáticas nos recuerda que para la introducción de los números enteros debemos tener presente el álgebra, puesto que estos dos saberes matemáticos se encuentran muy vinculados. Sin embargo, como apunta Freundenthal (1983), la potencia del álgebra se refuerza desde el siglo XVII en adelante con la necesidad de generalizar propiedades geométricas. Por ello, cuando pensamos en la introducción del álgebra consideramos que puede ser interesante enfocar el proceso desde esta parte de las matemáticas más visuales: la geometría. Estudios empíricos como el de Cogolludo-Agustín y Gil-Clemente (2019) evidencian la potencia de la geometría para llevar la comprensión y pensamiento crítico matemático a un nivel superior.

Tomando como punto de partida las primeras sesiones de la propuesta didáctica de introducción de los números enteros a través del álgebra de Eva Cid (2015), planteamos una situación de aprendizaje en la que el lenguaje algebraico aparece en un entorno geométrico. Además, nos apoyamos en un material que favorece a la comprensión por su potencia visual: los policubos.

Se trata de una propuesta para un curso de 1.º ESO en el que previamente se hayan trabajado los saberes básicos de los bloques de sentido espacial, sentido de la medida y sentido numérico (a excepción de los números enteros). Supone la introducción al bloque de sentido algebraico y pensamiento computacional.

Objetivos didácticos

— Introducir el lenguaje algebraico a través de la generalización de propiedades geométricas.
— Utilizar la potencia visual de la geometría para desarrollar el sentido algebraico.
— Acercar las matemáticas desde situaciones no abstractas.
— Utilizar materiales visuales que favorezcan el aprendizaje.

Elementos curriculares involucrados

— *Sentido numérico*: tanto a través de los patrones y las regularidades numéricas, como con el trabajo del sentido de las operaciones (a la hora de rellenar las tablas).
— *Sentido de la medida*: está presente en los conceptos de perímetro y área, aunque es el sentido que se trata más escuetamente.
— *Sentido espacial*: visualización de propiedades geométricas y uso de policubos para trabajar su modelización y razonamiento.
— *Sentido algebraico y pensamiento computacional*: introducción del lenguaje algebraico, comprobando su utilidad para expresar generalizaciones y resolver problemas.

Esta propuesta, enmarcada en la enseñanza a través de la resolución de problemas, supone el primer acercamiento del paso del quehacer aritmético al quehacer algebraico. La justificación para la aparición de letras es la generalización de propiedades geométricas que son abordadas inicialmente con números naturales. Se trabajan especialmente las competencias específicas CE.M.1, CE.M.2, CE.M.3, CE.M.4 y CE.M.5.

Metodología y estrategias didácticas

Todas las actividades se apoyan en un soporte visual: los policubos. Pese a ser un material con muchas más posibilidades, limitamos su uso al trabajo en una y dos dimensiones. Partimos de la recta, donde cada policubo representa únicamente una unidad de longitud. A continuación pasamos al plano (primero trabajamos con perímetros y luego con áreas), donde cada policubo representa una unidad cuadrada.

Para el manejo de los policubos en la recta utilizamos una adaptación de la propuesta realizada por Monari (2010) que podemos ver en la figura 1. En nuestro caso, nos parece relevante su manera de operar con la medida. Como podemos observar, al realizar una suma coloca en un extremo de la longitud inicial el elemento sumado. Nosotros colocaremos dicho elemento siempre en el lado derecho unido a la longitud inicial. Al restar, coloca debajo de la longitud inicial el elemento restado. Nosotros lo colocaremos debajo de la longitud inicial en el extremo derecho.

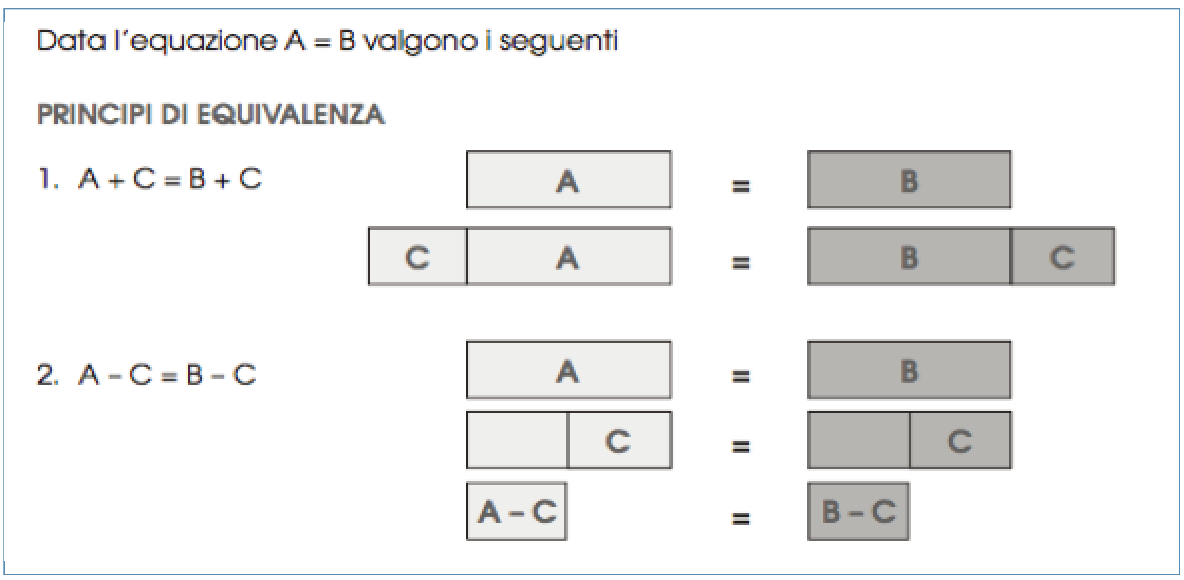


Figura 1. Método propuesto por Monari

La propuesta está pensada para ser trabajada en grupos de tres o cuatro personas. La primera fase siempre consiste en que traten de resolver una de las actividades propuestas. El docente se pasea por los grupos y les guía con preguntas. También aprovecha para comprobar lo que está haciendo cada grupo, identificando errores o dificultades. En la segunda fase se hace una puesta en común donde se comparten y analizan las respuestas de los diferentes grupos. Esta fase debe servir para asentar los conceptos y las propiedades que se ponen en juego en cada actividad.

Descripción de la actividad

Repartimos a cada grupo un total de 30 policubos de 3 colores diferentes y les explicamos el método a seguir para el trabajo con este material. Una vez hechas varias pruebas para cerciorarnos que el alumnado comprende el mecanismo de la suma y de la resta les planteamos el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1

Representa los siguientes enunciados:

1. Un muro mide 5 metros de largo. Por una tormenta se destruyen 2 metros de longitud y, después, se derrumba 1 metro más.
2. La valla de mi jardín mide 7 metros de largo. He añadido 1 metro a la valla y después, he quitado 2 metros para hacer una puerta.
3. Una verja mide 9 metros de largo. Trabajo durante el verano para que sea 5 metros más larga, pero en invierno, se destruyen 2 metros de longitud por una tormenta.
4. En mi casa del pueblo hay un muro. Durante el invierno construyo 2 metros más de largo y en verano derrumbo 5 metros de largo de dicho muro para hacer un camino.

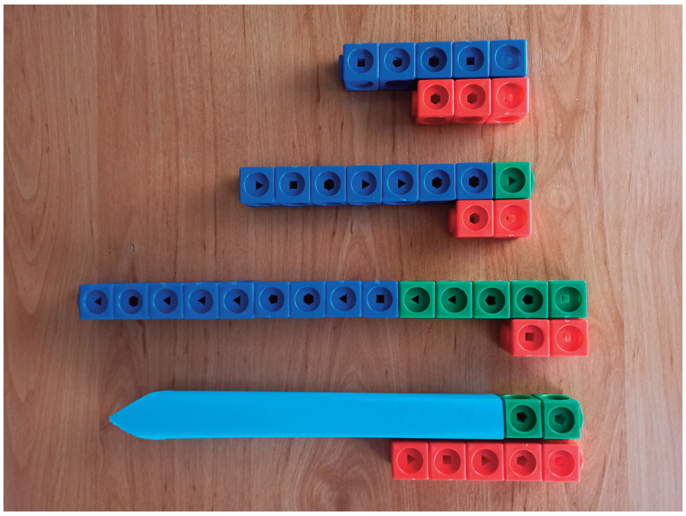


Figura 2. Representación de las cuatro situaciones del ejercicio 1

Dejamos que lo hagan libremente, haciendo hincapié en la necesidad de mostrar todas las operaciones efectuadas con los policubos. Para ello, recordamos que cuando sumamos añadimos policubos de otro color en la misma fila, que cuando restamos añadimos policubos de otro color en la fila inferior, que no quitamos nunca policubos y que nuestro objetivo no es conocer la solución, sino centrarnos en el proceso.

La dificultad de este ejercicio reside en el último apartado, ya que desconocemos la longitud inicial. Es ahí donde queremos crear la necesidad de introducir el lenguaje algebraico. No podemos utilizar un número finito de policubos, puesto que ignoramos la medida exacta del muro, por lo que vamos a introducir una variable. Su representación será la que se ve en la siguiente imagen, en donde el final en punta indica que desconocemos el valor exacto.

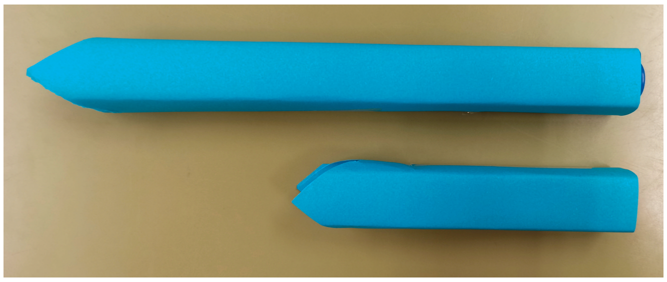


Figura 3. Representación de variables algebraicas

Una vez creada la necesidad de introducir un valor desconocido en sus ejercicios, nos gustaría dar un paso más planteándoles situaciones que quizás no sean posibles con el fin de trabajar el razonamiento crítico. Todas ellas se realizan con los policubos.

Ejercicio 2

¿Sería posible…?:

1. En un muro de 5 metros de largo, destruir primero 3 metros y luego destruir otros 3 metros.
2. En un muro de 6 metros de largo, destruir primero 2 metros y luego destruir 4 metros.
3. En un muro de 8 metros de largo, destruir 8 metros y construir 4 metros de largo.
4. En un muro, destruir 5 metros y construir 2 metros de largo.

Con estos problemas intentamos poner a prueba su comprensión. Debe ser lógico que no puedan destruir más metros de los que había inicialmente. Además, con la última situación lo que buscamos es que ellos mismos se planteen qué condiciones deben imponer para que ese problema tenga una solución factible. Nuestra intención es trabajar siempre desde el entendimiento, la comprensión de todo es clave para nosotros y nuestra búsqueda de un aprendizaje significativo.

En el siguiente ejercicio continuamos trabajando la idea de longitud. En este caso nuestro objetivo es medir el perímetro de diferentes rectángulos. Para ello, dejamos que construyan un rectángulo y les explicamos cómo vamos a marcar su perímetro (véase imagen, también se podría realizar marcando las caras externas con gomets). Realizamos este paso puesto que es importante que comprendan (o recuerden) que el perímetro está constituido por la suma de las caras externas de los policubos y no por el cómputo global de todos ellos. Una vez visto, les pedimos que realicen el siguiente ejercicio.

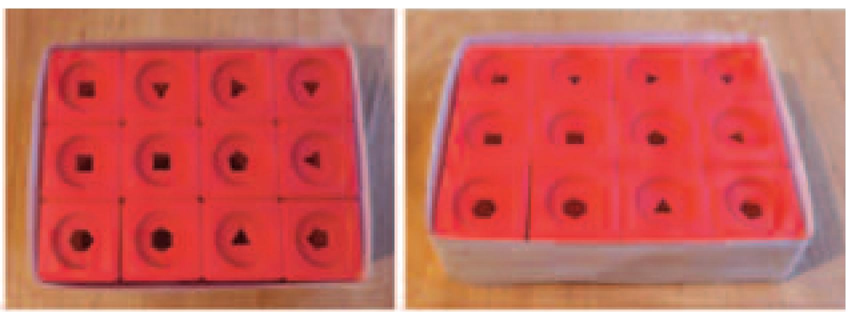


Figura 4. Representación del perímetro

Ejercicio 3

Con los policubos, construye un rectángulo de las medidas que queráis y seguid las siguientes instrucciones:

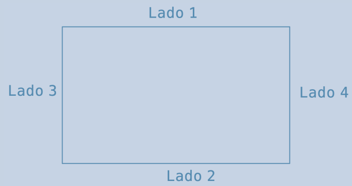
1. Aumentamos la dimensión del lado inferior del rectángulo en 1 policubo. Realizamos las acciones pertinentes para que siga siendo un rectángulo.
2. Aumentamos la dimensión del lado derecho del rectángulo en 1 policubo. Realizamos las acciones pertinentes para que siga siendo un rectángulo.
3. Aumentamos la dimensión del lado inferior del rectángulo en 3 policubos. Realizamos las acciones pertinentes para que siga siendo un rectángulo.
4. Quitamos 2 policubos del lado superior de nuestro rectángulo. Realizamos las acciones pertinentes para que siga siendo un rectángulo.

Al terminar este ejercicio, el alumnado debe entender que, si en un rectángulo aumentamos o disminuimos uno de los lados x unidades, hay que aumentar o disminuir x unidades el lado paralelo para que siga siendo un rectángulo.

La siguiente actividad parte del ejercicio anterior. En este caso deben completar la tabla según los datos proporcionados. Al haber realizado el ejercicio previo hay ciertas propiedades que ya deben dominar y que les son útiles para realizar con mayor consciencia y rapidez dicha tabla.

Ejercicio 4

Continúa trabajando con los policubos y completa la siguiente tabla:



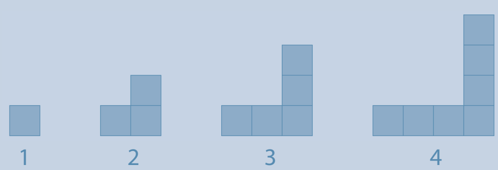
Caso	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Lado 1	2	2	3	5	3	2	2			
Lado 2	2	2			3	2	2			
Lado 3	3	3	4	2	3			3		
Lado 4	3		4		3			3		
Perímetro		10				14				10

Como podemos observar, la dificultad va aumentando conforme vamos avanzando. Inicialmente, gracias a las operaciones o las propiedades del rectángulo, podemos deducir los datos que faltan. Sin embargo, poco a poco, hay datos que resultan desconocidos, lo que nos lleva de nuevo a introducir letras (lenguaje algebraico). Al terminar este ejercicio, el alumnado debe ser consciente de la necesidad de trabajar con datos desconocidos y saber operar con ellos.

La siguiente actividad nos sirve para reforzar el valor del lenguaje algebraico para modelizar y describir situaciones. Combina dos actividades propuestas en el currículo de matemáticas de Aragón.

Ejercicio 5

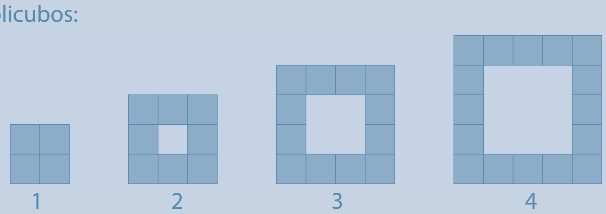
Construye con policubos las siguientes figuras:



1. ¿Cuántos policubos se necesitan para formar la siguiente figura? ¿Y la figura 6? ¿Y la 10?
2. Observa lo que has hecho y completa la siguiente tabla:

Número fig.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**10**	**215**	
Policubos									

3. Con las figuras de policubos que has construido en el ejercicio anterior y, sin romper ni dividir ninguna, transformarlas en las siguientes figuras únicamente añadiendo policubos:



4. ¿Cuántos policubos hemos añadido para hacer cada figura? Completa la siguiente tabla:

Número fig.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**10**			
Pol. iniciales								27		
Pol. añadidos									51	
Pol. totales										

Si en la primera parte han conseguido llegar a ver el caso general (la figura n tendrá $2n-1$ policubos), se puede intentar que lleguen a rellenar el caso general de esta tabla, en donde se llega a ver que $(2n-1)+(2n+1)=4n$.

En una última actividad, buscamos que el alumnado se dé cuenta de que también podemos trabajar con datos desconocidos en otras operaciones como son la multiplicación o la división, ya que hasta ahora solo hemos trabajado la suma y la resta. Para ello, recordamos el concepto de área de rectángulos. Como bien sabemos, su fórmula contiene una multiplicación de valores que pueden ser ambos conocidos, uno conocido y otro desconocido, o desconocidos los dos. Así pues, de la misma manera que hemos enfocado los ejercicios 3 y 4 planteamos este. Inicialmente dejamos que los alumnos creen su propio rectángulo y les hacemos preguntas respecto a añadir o quitar policubos de los lados. Posteriormente, completamos una tabla en la que primeramente tienen datos numéricos para rellenar y poco a poco se va incrementando el nivel hasta tener que utilizar variables algebraicas.

Recomendaciones para la evaluación formativa

Como se ha comentado en la parte de metodología, una vez que todos los grupos han terminado una actividad se debe hacer una puesta en común que sirva para analizar los errores y aciertos de lo planteado por cada grupo. En nuestra propuesta hemos indicado los objetivos o aquello que se pretende trabajar en cada actividad y debemos aprovechar las puestas en común para asegurarnos de que el alumnado sigue con el plan establecido y no hay personas que se queden atrás.

Referencias

Cid, E. (2015), *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*, Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.

Cogolludo-Agustín, J. I. y E. Gil-Clemente (2019), «The Effectiveness of Teaching Ge-ometry to Enhance Mathematical Understanding in Children with Down Syn-drome», *International Journal of Disability, Development and Education*, 66(2) 1–20.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel Publishing Company.

Monari, E,. y K. Pellegrinim (2010), «Algebra and problema-solving in Down síndrome: a study with 15 teenagers», Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1080/08856250903450814>.

Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, BOA n.º 156, de 11 de agosto de 2022.

Cup, Glass And Jug (Vicente Meavilla Seguí)