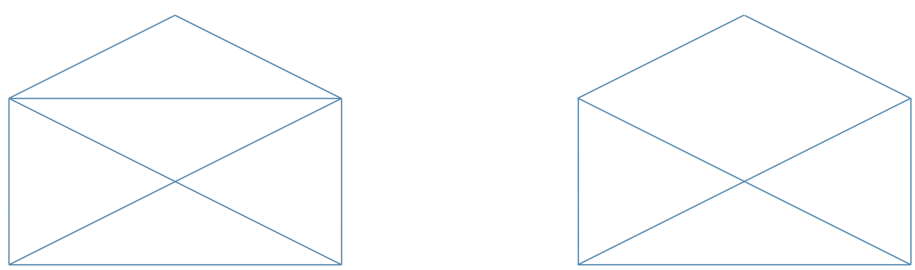
Dibujos sin levantar el lápiz: grafos eulerianos y método científico

por
NAYLA HERRÁN GRACIA
(IES Pablo Serrano, Andorra)

En esta comunicación se presenta una propuesta para que los estudiantes demuestren el teorema de Euler mediante el uso del método científico.

Es una actividad que realizo en Conexión Matemática bajo el nombre de «Los puentes de Königsberg» y en la asignatura optativa de 4.º ESO, Matemáticas para la toma de decisiones, como «Dibujos sin levantar el lápiz». El acercamiento es distinto en ambas actividades aunque el objetivo es el mismo. A través de la resolución de este problema, se impulsa la expresión oral del alumnado y se fomenta la argumentación, bien a través de ejemplos, contraejemplos o explicaciones algo menos formales según el grado de madurez del alumnado implicado.

¿Quién no ha intentado dibujar alguna vez esta casita sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por la misma línea? ¿Y se puede? ¿Y el sobre de la derecha?



Este es el núcleo de esta propuesta. Se proyecta una serie de dibujos que el alumnado tiene que realizar bajo estas dos condiciones; algunos de estos dibujos pueden realizarse y otros no, como es el caso de estos dos dibujos (¡*spoiler*!: el de la izquierda se puede y el de la derecha es imposible). Se les pide identificarlos y averiguar por qué en ciertas ocasiones se puede y en otras no. Traducido a vocabulario especializado, les pedimos que planteen hipótesis, las cuales irán comprobando a medida que se les proponen nuevos dibujos o que propongan contraejemplos para refutarlas. Acabamos de describir el método científico. Este método es algo muy teórico para ellos y haremos la conexión a través de un acertijo, el cual muchos estudiantes (especialmente los adolescentes) lo vinculan con vídeos de Instagram o TikTok.

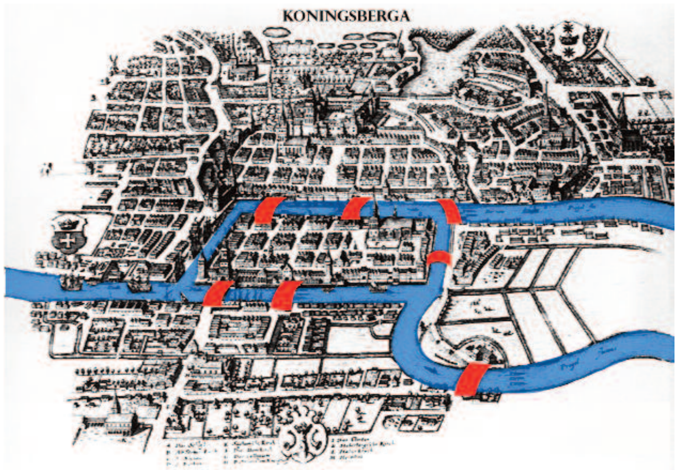
¿Qué tiene que ver un acertijo de TikTok con los grafos eulerianos?

Primero hay que definir qué es un grafo, sus elementos y algunas propiedades de forma rápida.

Un *grafo* es un conjunto de puntos, denominados *vértices* (*nodos*), unidos por un conjunto de líneas, denominadas *aristas*. Los grafos permiten representar conexiones entre los elementos de un conjunto. Por ejemplo, los mapas de metro son grafos en los que se representan las diferentes líneas y las paradas serían los nodos. También necesitamos definir un *camino* en teoría de grafos, que es una sucesión de vértices unidos por aristas y será un *ciclo* o camino cerrado si el vértice inicial y el final son el mismo. Un grafo tiene un *camino euleriano* si tiene un camino que recorre todas las aristas una única vez y en el caso de que sea cerrado, ciclo euleriano. Si un grafo contiene un *ciclo euleriano* se denomina *grafo euleriano*.

Por tanto aquellos dibujos que se pueden efectuar sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por la misma línea, son aquellos que contienen un camino o un ciclo euleriano.

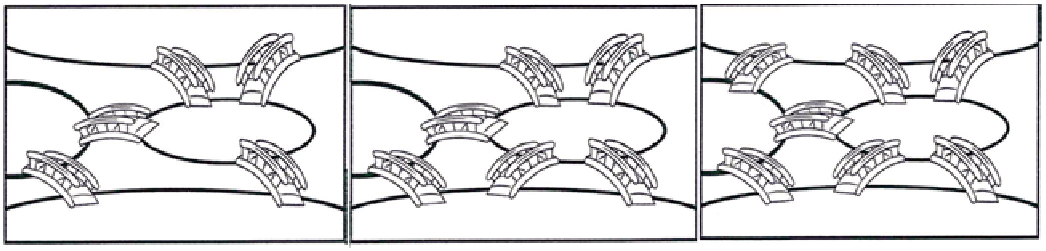
Los grafos eulerianos se denominan así en honor a Leonhard Euler quien resolvió el problema de «Los puentes de Königsberg» que consistía en cruzar los siete puentes de la ciudad pasando por ellos una única vez. Algunos matemáticos consideran este problema como el punto de partida de la topología y de la teoría de grafos, por supuesto. No es de extrañar entonces que esto llamara mi atención en mi primer año de carrera y más adelante me motivara a proponer una actividad en torno a ello.



Acercamiento 1: Conexión Matemática

Se presenta el problema de los puentes de Königsberg para ambientar la actividad y la historia, y situarlos. A continuación, se les propone actuar como matemáticos y resolver dicho problema simplificado.

¿Puede resolverse dicho problema con 5 o 6 puentes? ¿Y con 7?



Tras alguna prueba rápida, observan que las dos primeras situaciones pueden realizarse pero la última se resiste. Si algún alumno o alumna indica que lo ha conseguido, le pedimos que lo repita hasta que normalmente se da cuenta que ha incumplido alguna de las condiciones.

Después de esta breve introducción, trasladamos este problema al problema análogo de realizar dibujos sin levantar el lápiz. Iremos anotando las hipótesis que los estudiantes plantean en la pizarra para que todo el mundo pueda analizarlas, y valorar su cumplimiento o rebatirlas.

En el caso de Conexión Matemática, la duración es limitada a una sesión de entre 50 minutos a 1 h 30 min, por lo que se lanzan pistas para poder llegar al resultado dentro de ese tiempo.

Cabe señalar que es una actividad que llevo realizando, desde hace 10 años, con alumnado de primaria, de secundaria y adultos con diferentes resultados que comentaré más adelante.

Acercamiento 2: Matemáticas para la toma de decisiones

Directamente presentamos el problema de los dibujos sin levantar el lápiz e iniciamos el proceso deductivo que se da implícitamente en el método científico. En este acercamiento, el uso del vocabulario específico resulta de gran importancia: buscamos que planteen de forma clara y concisa hipótesis, que analicen y aporten argumentos para validar su planteamiento y que sean capaces de reformularlas en caso de no ser adecuadas. Para ello tendrán que hacer uso de los términos aprendidos en las sesiones previas, recogerán dichos pasos por escrito en su cuaderno mientras que yo tomaré nota de sus aportaciones individuales hechas al oral.

Este proceso inicial permite al alumnado llegar a la misma conclusión a que llegó Euler a la vez que hemos construido las bases de la teoría que van a aplicar en las siguientes sesiones, en las que veremos el problema de los puentes de Königsberg y el del cartero y en las que crearán sus propios grafos que cumplan una serie de características (uno con un camino euleriano, otro con un ciclo y otro no euleriano).

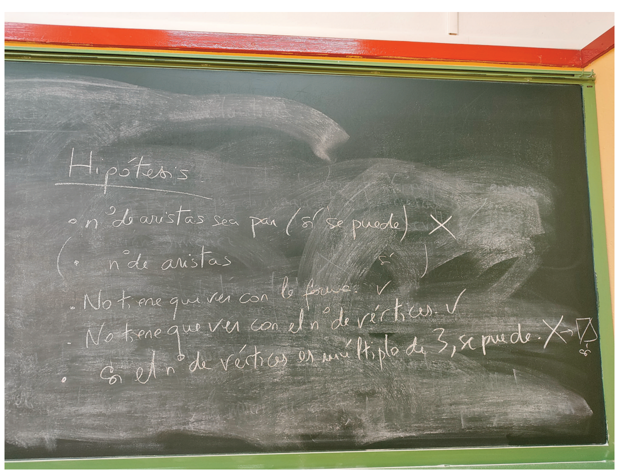
Ahora la actividad no es exclusivamente divulgativa sino que forma parte de un currículo y será evaluada mediante los instrumentos antes nombrados. Igualmente con ella buscamos evaluar los criterios de evaluación 2.3, 2.4 y 2.5 establecidos en la normativa de esta asignatura.

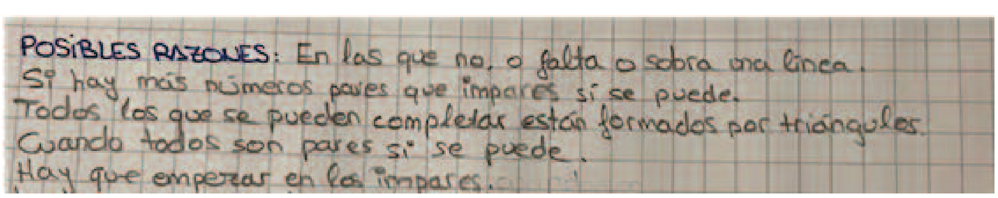
El número de alumnos de esta materia en mi centro es bajo por lo que las hipótesis se proponen en gran grupo. Si el número fuera más elevado, se podría plantear este análisis en grupos colaborativos para que la argumentación se diera de forma más controlada y rápida; en tal caso propondría una estructura colaborativa de lápices al centro o de 1, 2, 4.

Hipótesis propuestas frecuentemente por el alumnado

Tras haber llevado a cabo esta actividad en muchas ocasiones, en grupos independientes entre sí, compuestos por un alumnado de edades y contextos muy variados, he podido observar que las hipótesis planteadas se repiten con mucha frecuencia.

— Si el número de vértices es par, se puede realizar.
— Si es simétrica se puede realizar.
— Si está conformada por triángulos se puede realizar.
— Si hay más vértices con un número de caminos pares que llegan que impares se puede.
— Hay que empezar en los impares.
…





Análisis de resultados

— Resulta una propuesta inicialmente atrayente, todo el alumnado se engancha a resolver los dibujos.
— Los niños son menos vergonzosos y más creativos a la hora de proponer hipótesis, los adultos temen más el error.
— Todos son capaces de proponer alguna hipótesis , incluso aquellos a los que «se le dan mal las matemáticas».
— Suele ser necesario más de una hora para resolver completamente dicho problema. Se recomienda dar una pista para que el alumnado no pierda el interés.
—Es conveniente tener una «biblioteca» de grafos para proponer más ejemplos y contraejemplos.

Conclusiones

La actividad resulta en apariencia muy sencilla pero es a la vez muy potente porque con un contenido mínimo, el alumnado practica procedimientos de resolución de problemas, de argumentación y de comunicación de resultados, que son competencias imprescindibles en la asignatura, en la etapa… En definitiva, para garantizar el perfil de salida de nuestros alumnos.

Además, muestra la conexión entre las matemáticas y las asignaturas científicas que tienen como base el método científico, permitiendo la transversalidad de los procedimientos.

Asimismo, esta actividad trabaja el sentido socioafectivo del alumnado, dado que es independiente de los conocimientos teóricos típicos de las matemáticas y se centra en que los alumnos participen activamente, sin importar si su respuesta era correcta o no. Es especialmente efectivo con aquellos alumnos que tienen una relación negativa previa con las matemáticas, porque todo el mundo puede intentarlo, y lo que cuenta es el proceso.

Finalmente, el trabajo colaborativo para llegar a la solución es una parte esencial de esta actividad, no solo porque simula el carácter de trabajo común de la ciencia, sino porque se crea una comunidad en la que el alumnado se siente valorado por sus aportaciones, y donde el aprendizaje les resulta más interesante.

Referencias bibliográficas

ANDALÓN, J. [Canal Math2me] (24 de septiembre de 2015), *¿Puedes dibujar sin despegar el lápiz?* [archivo de video], YouTube, <https://youtu.be/IZ0-xFrlvag?si=8f8UWD5dnYHJSDMp>.

BELTRÁN-PELLICER, P., y S. MARTÍNEZ-JUSTE (2021), «Enseñar a través de la resolución de problemas», *Suma*, 98, 11-21.

GRIMA, C. (2018), *¡Que las mates te acompañen!,* Editorial Ariel.

JULVE, C. (2024). «Teoría de Grafos, una propuesta para la asignatura Matemáticas para la toma de decisiones», *Entorno Abierto*, 55.