

Teoría de Juegos.

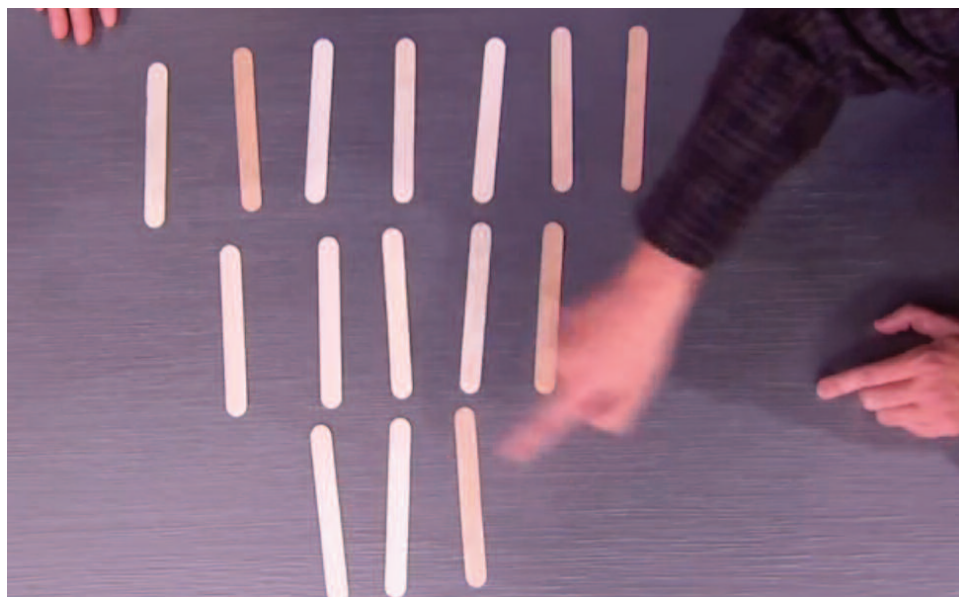
De ganar un coche en televisión al currículo de secundaria

por

DIEGO RECAJ ARBIOL

(Estudiante del Máster de Profesorado, Universidad de Zaragoza)

En el programa de televisión *El Hormiguero* hay una sección en la que un colaborador llamado Don Rogelio reta a personas del público al siguiente juego: «sobre una mesa hay tres filas de palos con tres, cinco y siete palos respectivamente. En su turno, cada jugador puede eliminar tantos palos como quiera pero solo de una misma fila, y el jugador que quite el último palo pierde». Durante varias temporadas Don Rogelio se mantuvo invencible, ganando incluso a Los Lobos, vencedores del millonario bote del programa *Boom* en 2019. Recientemente, sin embargo, una persona consiguió ganar a Don Rogelio y con ello llevarse a casa un coche. ¿Acaso tenía esta persona superpoderes? No puedo decir con certeza que no, pero sí puedo asegurar que sabía matemáticas.



La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas que modeliza y estudia interacciones en estructuras formalizadas de incentivos, llamadas juegos. Fue desarrollada en sus inicios para entender el comportamiento de la economía, pero últimamente se ha empezado a usar en el desarrollo de inteligencias artificiales, por su aplicación a la construcción de comportamientos racionales. No es de extrañar, pues, que se incluya dentro de la programación de Matemáticas para la Toma de Decisiones, asignatura optativa recientemente incorporada al currículo de secundaria en Aragón, concretamente en 4.º de ESO. Lo que sigue es una propuesta sobre cómo introducir algunos conceptos básicos de la Teoría de Juegos a partir del juego de Don Rogelio, aplicable en esta asignatura, además de en otro tipo de contextos de matemática divulgativa, e incluso adaptable para asignaturas ordinarias de matemáticas en secundaria o bachillerato.

El juego del NIM

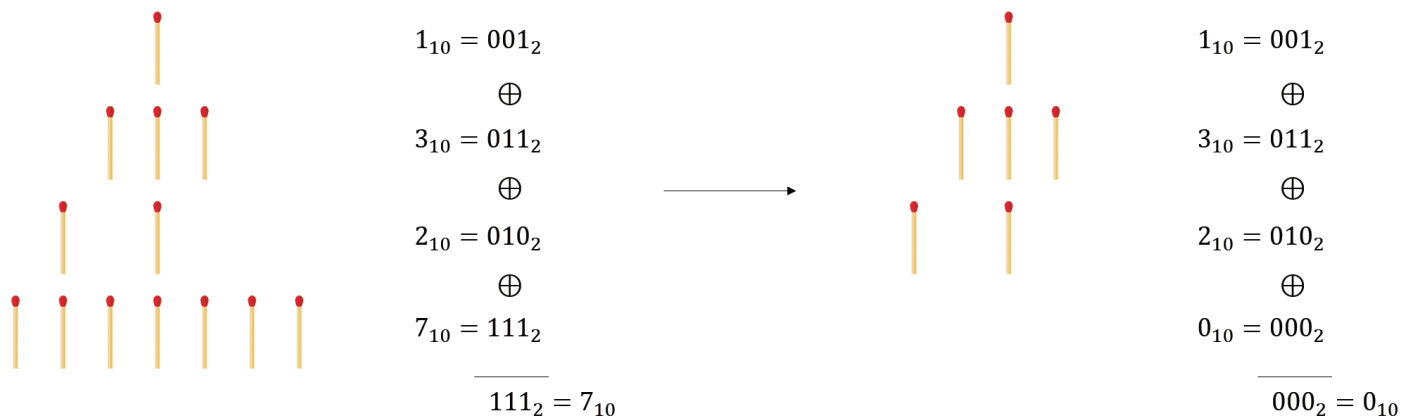
El juego de Don Rogelio puede generalizarse al caso de n montones de palos con x_k palos en el montón $k=1, 2, \dots, n$. Recibe el nombre de NIM, y tiene un origen tan antiguo como incierto, aunque se cree que se inventó en China y sus primeras referencias europeas son del siglo XVI. Como se ha explicado previamente, dos jugadores se turnan para quitar tantos palos como quieran de un mismo montón. En el programa se juega al NIM en un modo conocido en la teoría de juegos como *misère*, implicando que el jugador que pierde es el que quita el último palo. El modo normal del juego es al contrario, es decir, gana el jugador que deje la mesa vacía tras eliminar cuantos palos quedasen en el último montón en juego. Esta versión es la que a continuación se desarrolla, por su mayor simplicidad en algunos aspectos y su analogía con otros juegos que pueden explorarse después o paralelamente.

Jugar unas cuantas partidas de este juego, bien sea con tres montones de tres, cinco y siete palos, como en el programa, o con otras cantidades arbitrarias, va a poner la mente a funcionar enseguida. No importa cuál sea nuestro público, la pregunta esencial surge naturalmente: ¿es posible ganar siempre?

El estudio matemático de este juego se basa en una operación definida sobre el sistema binario, conocida como suma XOR BIT A BIT, o más popularmente dentro de la teoría de juegos, NIM-SUMA, representada con el símbolo \oplus . Dados dos números en sistema binario, su NIM-SUMA se calcula sencillamente comparando bit a bit estos dos números y asignando un 0 o un 1 a la posición correspondiente del resultado según sean los bits que se comparen iguales o distintos, respectivamente. A modo de ejemplo, si $a=5_{10}=101_2$ y $b=6_{10}=110_2$ entonces:

$$a \oplus b = (1 \oplus 1) \cdot 2^2 + (1 \oplus 0) \cdot 2^1 + (0 \oplus 1) \cdot 2^0 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 001_2 = 3_{10}.$$

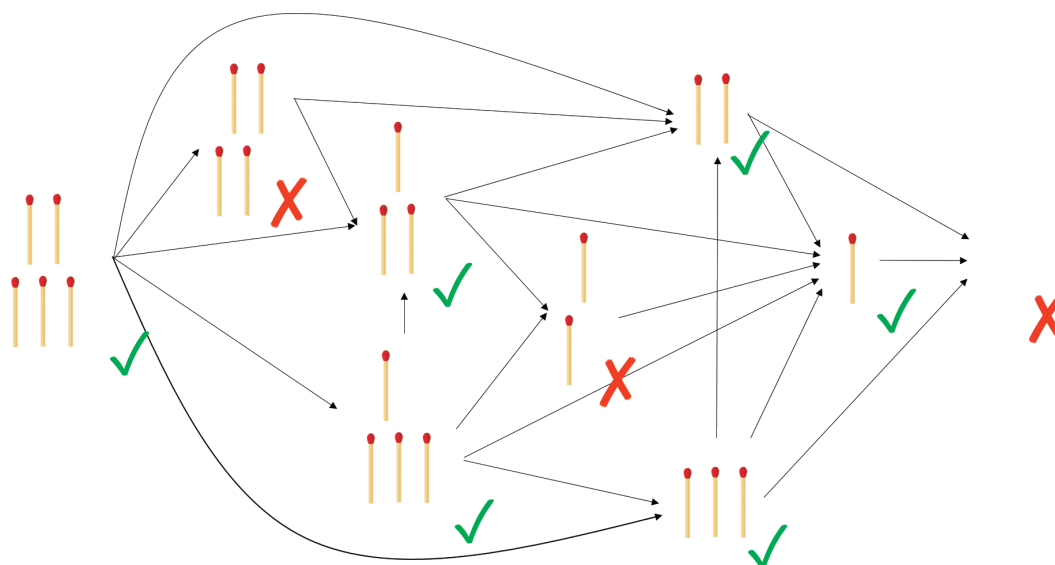
Volviendo al juego, en cada nueva situación que nos encontremos deberemos calcular la NIM-SUMA de los tamaños de los montones que hay en juego. Siempre que esta no sea nula, se podrá encontrar un movimiento que conduzca a una nueva situación donde la NIM-SUMA sí sea nula. Sin embargo, si la NIM-SUMA es nula, cualquier movimiento conduce siempre a una nueva situación con NIM-SUMA no nula. Estos dos hechos se ven de manera bastante intuitiva tras manipular unas cuantas veces esta operación, si bien su demostración detallada, que puede encontrarse en Siegel (2013), queda fuera del objetivo de esta comunicación. El siguiente es un ejemplo de movimiento que transforma una situación de NIM-SUMA no nula, concretamente 7, en una situación de NIM-SUMA nula.



Puesto que el último movimiento consiste siempre en pasar de una situación en la que solo queda un montón con un número arbitrario de palos (situación de NIM-SUMA no nula) a la situación vacía (situación de NIM-SUMA nula), es obvio que para ganar debemos tratar de dejar situaciones de NIM-SUMA nula al oponente. Ello solo será posible cuando partamos de una situación de NIM-SUMA no nula. Así pues, según sea la NIM-SUMA de la situación inicial nula o no, podrá ganar el segundo o el primer jugador, respectivamente, siguiendo la indicación anterior.

En juegos de NIM particulares, como el de Don Rogelio en *El Hormiguero*, se pueden calcular todas las posibles situaciones de NIM-SUMA nula, reduciéndose la estrategia a memorizarlas y conducir el oponente a alguna de ellas, en lugar de realizar los cálculos en cada nueva situación.

Si el juego es pequeño, también se puede construir un diagrama con todas las posibles situaciones y etiquetar cada una como buena o mala. Para ello habrá que empezar desde la situación vacía, que claramente es mala, y etiquetar una situación previa como buena si a partir de ella se puede llegar a una mala; o como mala si todas a las que se pueden llegar a partir de ella son buenas. A continuación se presenta un ejemplo para un juego de NIM con dos montones de dos y tres palos, respectivamente, donde las situaciones buenas se etiquetan con ✓ y las malas con ✗. Puede comprobarse que las situaciones malas coinciden exactamente con las de NIM-SUMA nula.



Elementos curriculares en el NIM

La teoría de juegos conforma el tercer bloque de saberes básicos del currículo de Matemáticas para la Toma de Decisiones, que tiene por objetivo «introducir las nociones básicas de esta rama de las matemáticas que puedan utilizarse para modelizar múltiples situaciones que subyacen a problemas reales vinculados a la toma de decisiones».

El primer concepto que se puede introducir a partir del NIM es la propia noción de juego, entendida en matemáticas como el conjunto de reglas que definen la estructura modelizada, incluyendo el número de jugadores, la situación inicial, sus posibilidades en cada turno... Es importante diferenciar el concepto de juego del de partida, que no es sino una realización particular del juego en cuestión. Asimismo, conviene distinguir entre la noción de movimiento, esto es cada posibilidad de elección de un jugador de acuerdo a las reglas del juego, de la de elección, que es la alternativa realizada. Así pues, un juego es una secuencia de movimientos, mientras que una partida es una secuencia de elecciones. Los juegos pueden clasificarse en:

- Aleatorios o deterministas, según haya o no alguna componente del juego que dependa del azar. El NIM es un juego determinista, ya que depende únicamente de las decisiones de los jugadores. Un ejemplo de juego aleatorio sería el parchís, donde a estas decisiones se suma la componente de azar del dado.
- De información perfecta o imperfecta, según todos los jugadores conozcan en todo momento todas las posibilidades de juego propias y ajenas. El NIM es un juego de información perfecta, pues ambos jugadores ven en todo momento los palos que quedan y los que han quitado ellos mismos y el oponente. Un ejemplo de juego de información imperfecta es el guiñote, pues no se saben las cartas que tienen los demás jugadores en su mano.

Un juego de dos jugadores determinista y de información perfecta se llama juego combinatorio. Son juegos combinatorios desde el tres en raya hasta el ajedrez, pasando por el NIM. Todas estas ideas se incluyen dentro del apartado C.1 de saberes básicos del bloque de teoría de juegos, denominado «Definiciones Básicas».

Sin embargo, el concepto más importante de la teoría de juegos que a menudo cuesta comprender al alumnado de secundaria y que a mi juicio el NIM explica a la perfección es el de estrategia ganadora. Una estrategia para un determinado jugador es un plan de acción para cualquier situación que se pueda dar en el juego, determinando completamente la forma de tomar la elección en cualquier partida. Así pues, una estrategia se dice ganadora si al seguir un jugador concreto dicha estrategia está asegurada su victoria. Por ejemplo, una estrategia en el NIM podría consistir en quitar siempre un palo del montón que más tenga, pero claramente esta no es una estrategia ganadora. La estrategia consistente en realizar un movimiento que conduzca a una situación de NIM-SUMA nula sí es ganadora para el jugador que pueda efectuarla. Esto pone de manifiesto cómo las matemáticas ayudan en la toma de decisiones para un determinado fin, en este caso ganar el juego.

Más concretamente, dicha estrategia pasa por el sistema binario, o aritmética modular de módulo 2, parte del contenido de esta asignatura, con lo que se supone trabajado con el alumnado previamente al incluirse en el apartado de saberes básicos A.2, «Aritmética Modular» del bloque de aritmética modular y criptografía. El concepto de estrategia ganadora queda pues muy consolidado con este juego, e incluso puede hablarse de estrategias más o menos eficientes: en el del juego de Don Rogelio, caso particular del NIM donde siempre hay el mismo número de palos, basta con memorizar las posiciones de NIM-SUMA nula.

Además, puede relacionarse la estrategia ganadora del juego con la construcción del diagrama de posibilidades descrito al final del apartado anterior, que es en realidad el concepto teórico conocido como forma extensiva de un juego, incluido dentro del apartado C.2 de saberes básicos, «Formas de Representar un Juego». Esta construcción, desde el punto de vista matemático no es más que un grafo dirigido cuyos vértices son todas las distintas situaciones del juego, habiendo una arista de un vértice a otro siempre que se pueda llegar desde la situación representada por el primer vértice a la representada por el segundo. La teoría de grafos es también parte del contenido de esta asignatura, con lo que el concepto de grafo dirigido es supuestamente conocido por el alumnado, pues se incluye en el apartado de saberes básicos B.1, «Definición, Conceptos y Propiedades Básicas» del bloque de teoría de grafos.

En definitiva, la introducción a la teoría de juegos a través del NIM proporciona no solamente un amplio abanico de definiciones y nociones propias de esta rama con las que comenzar a ahondar en la misma, sino una conexión con los dos bloques previos de la asignatura y por tanto un repaso de estos.

La puesta en acción

La primera ocasión en la que he tenido oportunidad de poner a prueba la enseñanza de estos conceptos a través del NIM es la sesión del Taller de Talento Matemático de la Universidad de Zaragoza que impartí en nombre de la asociación de estudiantes de matemáticas de la Facultad de Ciencias, Matemañicos, el pasado 31 de enero. En este caso el público fue alumnado de Bachillerato con denotado interés en las matemáticas, simplificando ampliamente la tarea.

A tal efecto, la sesión que diseñé fue en ciertos aspectos más avanzada que la que podría plantearse para un nivel de 4.º de ESO, si bien mantiene la esencia de lo que he venido tratando hasta aquí. Puesto que el objetivo es desarrollar la teoría explicada en las secciones anteriores mediante la interacción con el alumnado, comencé mostrando un vídeo extraído de *El Hormiguero* con el que mostrar el funcionamiento del NIM, para después dejarles jugar por parejas durante unos minutos, de manera que las preguntas vayan surgiendo en su mente. Comprobé que es interesante formularles cuestiones sobre quién ha comenzado a jugar cada partida y quién la ha ganado para que vayan sacando conclusiones. Además, una buena manera de guiarles cuando sus conclusiones son erróneas es jugar contra ellos una partida que sirva como contraejemplo a las mismas.

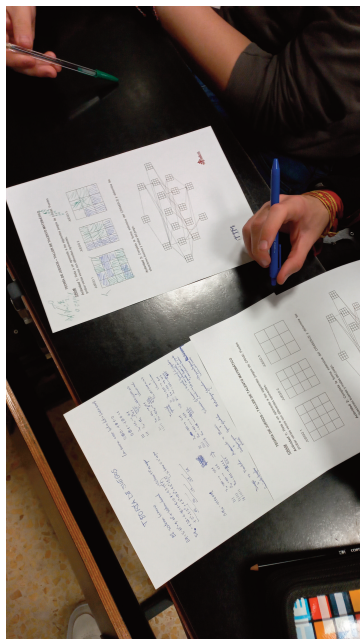
A continuación podemos pasar a formalizar las respuestas de manera escalonada. En mi opinión, la manera más intuitiva, de acuerdo además con los principios de suelo bajo y umbral alto, consiste en comenzar con una situación trivial en la que tan solo hay un montón en juego. Cualquiera ve enseguida la respuesta, pero es importante tratar este caso, pues representa de hecho el último movimiento de cualquier partida de NIM. Pasamos después a estudiar las situaciones con dos montones, de las cuales surge la motivación para introducir el ámbito teórico del sistema binario, con el fin de distinguir la paridad de los montones. Sin embargo, al pasar a una situación con tres

montones, vemos que esto no es suficiente para clasificar todas las situaciones, pero nos proporciona el camino para ello: crear una operación en binario que etiquete una situación como buena o mala de acuerdo a lo observado, la suma XOR BIT A BIT.

El alumnado siguió con facilidad estas explicaciones e incluso ciertos alumnos propusieron soluciones parciales que ayudaron a motivar la introducción de ciertos caminos matemáticos a priori poco intuitivos. La explicación del juego concluyó con una muestra del comportamiento de la NIM-SUMA, reservando los detalles de su demostración a un documento que se colgó en la web del Taller de Talento Matemático, por si ciertos estudiantes con mayor nivel quisieran consultarlo posteriormente a la sesión.

El tratamiento de la forma extensiva de los juegos pasó por la introducción de un segundo juego que complementó la sesión a la perfección. Dicho juego se llama CRAM, y sus detalles pueden consultarse en Siegel (2013), pero básicamente consiste en colocar alternadamente fichas de tamaño 2×1 en horizontal o vertical sobre un tablero de $n \times m$ casillas hasta que cierto jugador ya no pueda colocar más, en cuyo caso pierde. Es otro juego combinatorio con una estrategia ganadora muy sencilla, en especial en comparación con la del NIM, en el caso de n y m pares, o en el caso de que uno sea par y otro impar. El caso de n y m impares, sin embargo, no tiene una resolución general, pero los casos pequeños, como el 3×3 , pueden resolverse mediante el uso de la forma extensiva. Esto fue lo que hicimos en el taller, motivando así la construcción de la forma extensiva del NIM expuesta en el primer apartado con la que comprobar que esta nueva estrategia coincidía con la de la NIM-SUMA.

En todo momento el alumnado se mostró participativo, suponiendo las situaciones de juego un reto para ellos que sin duda ayuda a acercarse a las matemáticas de una manera más entretenida y que posteriormente facilita la formalización de conceptos no necesariamente triviales como el de estrategia ganadora o forma extensiva, o incluso el sistema binario.



Y ahora, ¿qué?

El desarrollo de esta secuencia didáctica forma parte de mi trabajo como estudiante del Máster de profesorado de secundaria, bachillerato, formación profesional y enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas, en la especialidad de Matemáticas. Concretamente, estoy desarrollando un Trabajo Fin de Máster en modalidad de iniciación a la investigación bajo el título de *Aplicación didáctica de la historia de las matemáticas*. Mi objetivo último en este trabajo es planificar un modelo para la unidad didáctica correspondiente al bloque de Teoría de Juegos de Matemáticas Para la Toma de Decisiones en 4.º de ESO, motivándola a través de su introducción histórica a partir del estudio de comportamientos racionales.

Por su reciente incorporación al currículo de secundaria, la teoría de juegos está todavía poco desarrollada en este ámbito, lo cual me motiva a investigar sobre ella y aportar mi visión para su tratamiento en el aula. Dentro de este desarrollo, la secuencia aquí expuesta conformaría, junto con alguna otra situación de aprendizaje más directamente relacionada con la historia reciente de la teoría de juegos, la introducción al bloque. En los próximos meses tendré la oportunidad de llevarla al aula en el centro donde realizo el Prácticum del Máster y con ello extraer conclusiones y poder comparar la experiencia con la del Taller de Talento Matemático.

A modo de conclusión provisional puedo decir que la enseñanza de la teoría de juegos no es solamente una gran estrategia de gamificación en el sentido más literal de la palabra, sino una posibilidad de construir estructuras de pensamiento racional propias de las matemáticas en un sentido más amplio. Por todo ello me parece interesante su introducción en el currículo de secundaria y personalmente pienso que su presencia en asignaturas ordinarias en un futuro no muy lejano podría contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

- ROSSELL, F. (2019), *Teoría de juegos. Sin Riesgo no hay ganancia*, Ed. EMSE EDAPP.
SIEGEL, A. (2013), *Combinatorial Game Theory*, American Mathematical Society, Providence.